Exercice 1 Développer les sommes suivantes

a) $\sum_{i=1}^{5} i^2$ b) $\sum_{i=3}^{7} 2^i$ c) $\sum_{i=1}^{n} i^3$ e) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}$

d) $S_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i}$ $S_1 =?$ $S_2 =?$ $S_3 =?$

f) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}$ g) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} a_{i,j}$ h) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{i+3} a_{i,j}$

Exercice 2

1) $S_n = 1+2+3+\cdots+n$, avec $n \geq 1$
Donner sous forme développée $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5$

2) $T_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \geq 0$
Donner sous forme développée $T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5$.

3) $V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$, $n \geq 1$
Donner sous forme développée : $V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5$

4) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n , T_{n+1} en fonction de T_n , V_{n+1} en fonction de V_n

5) $S'_1 = 1$ $S'_2 = 1 - \frac{1}{2}$ $S'_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $S'_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$
Ecrire S'_5 et ensuite donner une expression développée de S'_n.
Exprimer S'_{n+1} en fonction de S'_n.

6) $T'_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ $T'_2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9}$ $T'_3 = \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{5}{11} + \frac{6}{13}$
Ecrire T'_4 et ensuite donner une expression développée de T'_n.
Exprimer T'_{n+1} en fonction de T'_n.

7) Exprimer avec le symbole Σ : $S_n,\ T_n,\ V_n,\ S'_n,\ T'_n$

Exercice 3

a) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$

b) Démontrer les formules suivantes pour $n \geq 1$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 4
Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $(u_{i,j})$ une suite de réels positifs. Permuter les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} u_{i,j}$ b) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} u_{i,j}$ c**) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{p} u_{i,j}$ (avec $n \leq p$)

Exercice 5 (Changements d'indices) En changeant d'indices calculer

$A = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$ $B = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^3$ $C = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^3$

Exercice 6 (op 747) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1. $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$ 2. $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ 3. $\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{k+2}{k})$

4. $\sum_{k=2}^{2n}(n^2+3n-1)$ 5. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n} ij$ 6. $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j+1}$

7. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j)$ 8. $\sum_{1\leq i<j\leq n}(i+j)$ pour $n \geq 2$

9. $\sum_{i=n}^{2n} 2^i$ 10. $\sum_{k=0}^{n}\exp(-ka)$ 11. $\prod_{k=1}^{n} a^k$

12. La somme des carrés des n premiers nombres impairs.

Exercice 7 On pose $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $k \geq 1$

a) Déterminer $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ tels que $u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ pour tout $k \geq 1$

b) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$