Exercice 1 Produits

a) Pour $n \geq 1$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^{k+1}$.

b) Pour $n \geq 2$, donner une expression simple de $\displaystyle C_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ et en déduire la limite de C_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 **factorielle**

1) Calculer $1!,\ 2!,\ 6!$

2) Simplifier $a = \dfrac{7!}{6!}$ $b = \dfrac{12!}{14!}$ $c = \dfrac{15! \times 26!}{17! \times 23!}$ $d = \dfrac{(n-2)!}{(n+1)!}$

3) Écrire comme quotients de factorielles

$$a = 26 \times 27 \times 28 \quad b = \frac{1}{13 \times 12 \times 11} \quad c_n = \prod_{k=n}^{2n+1} k$$

4) Ecrire sous forme d'un produit, puis en utilisant les factorielles :
$A = 2 \times 4 \times \cdots \times 50 \times 52$

$B = 1 \times 3 \times \cdots \times 51 \times 53$

$C_n = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n)$

$D_n = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$

Exercice 3 **Coefficients binomiaux**

1) Calculer sous forme de produits d'entiers $\binom{10}{4}$ $\binom{11}{7}$

2) Donner une expression sans factorielle de

$$\binom{n}{0}; \quad \binom{n}{n-1}; \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n+1}{3}$$

3) Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k}/a$ avec a entier

$$A = \frac{15!}{8!8!} \quad B = \frac{13!}{7!5!} \quad C = \frac{12!}{7!6!} \quad D = \frac{18!}{15!5!}$$

4) Montrer les propriétés suivantes :

a) Pour $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) Pour $1 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

c) Formule de Pascal : Pour $1 \leq k \leq n$
$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

5) Construire les 6 premières lignes du triangle de Pascal

6) a) Démontrer la formule suivante par récurrence sur n

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \quad \text{pour} \quad p \leq n$$

b) La démontrer en faisant un télescopage utilisant la formule de Pascal.

Exercice 4 Binôme de Newton

1) Démontrer la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

2) Calculer $(1+2i)^5$

3) Calculer $\displaystyle A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ $\displaystyle B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ $\displaystyle D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x^k$

$$E = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{e}^{n-2k}}{2^{2k+n}} \quad F = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

4) Calculer $\displaystyle A = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle B = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$

(On pourra étudier $A+B$ et $A-B$)

5) On veut calculer $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

a) Première méthode : utiliser la formule 4)b) de l'exo 3

b) Deuxième méthode : On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$. Donner une autre expression de $f(x)$ et en déduire deux expressions de $f'(x)$. En déduire finalement la valeur de S_n.

6) Adapter les méthodes précédentes afin de calculer

$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} \quad \text{puis en déduire} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$