

Exercice 1 On donne : $3 < a < 5$ et $7 < b < 10$. Encadrer :

$$A = 2a - 3b; \quad B = \frac{a}{b}; \quad C = (2a - 1)\left(\frac{b}{2} - 2\right); \quad D = \frac{2a - 1}{\frac{b}{2} - 2};$$

$$E = -2(a - 1)^2; \quad F = 3(b - 9)^2; \quad G = e^{-2a+1}; \quad H = \ln(-2b + 23)$$

Exercice 2 On donne : $3 < x < 5$ et $A(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$

- Donner un encadrement « rustique » de $A(x)$
- En étudiant les variations de A , donner le meilleur encadrement possible de $A(x)$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ x > -2$ | b) $ x + 3 < 5$ | c) $ -2x + 1 > 2$ |
| d) $ x + 1 < 2x - 1 $ | e) $ x < 2x + 1$ | f) $ 2x - 1 \geq 3x$ |
| g) $2x^4 - 7x^2 + 5 < 0$ | h) $\sqrt{-x} \geq 2$ | i) $\sqrt{x+2} - x \geq 0$ |
| j) $\sqrt{2x+1} + x - 8 < 0$ | k) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{2}{x+3}$ | l) $\frac{x}{x-1} < \frac{x+2}{2x}$ |

Exercice 4 Puissances

- Déterminer n et p tels que : $\frac{\sqrt{6^3}}{12^4} = 2^n 3^p$
- Déterminer pour chaque expression a et q tels que : $u_n = a \times q^n$

$$\text{a) } u_n = \left(\frac{3^{n-1}}{e^{2n+1}}\right)^3 \quad \text{b) } u_n = \frac{12^{2n}}{25^{-n+2}} \times (\sqrt{15})^{-3n}$$

Exercice 5

Ecrire sous forme irréductible les expressions suivantes : (aucun facteur carré sous la racine, pas de racine au dénominateur, pas de fraction sous les racines)

$$\begin{array}{lll} A = \sqrt{125} & B = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 & C = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ D = \frac{2}{\sqrt{2} - 3} & E = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}} & F = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{75}} \\ G = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right)^2 & H = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} & I = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} \end{array}$$

Exercice 6

Démontrer par récurrence :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7. (Sans utiliser les congruences)
- On définit la suite u par $u_0 = 8$ $u_1 = 1$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \text{pour } n \geq 0$$
Montrer que $u_n = 3 \cdot 2^n + 5(-1)^n$ pour $n \geq 0$
- Montrer que pour $n \geq 5$, $2^n > n^2$

Exercice 7 Tracer de fonctions

On pose $f(x) = \lfloor x \rfloor$ $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$ $h(x) = x - \frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor$

- Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq h(x) < 1/2$$

- Donner une expression de $f(x)$ et $g(x)$ sans utiliser la partie entière respectivement sur les intervalles :

$$[0, 1[\quad [1, 2[\quad [2, 3[\quad [-1, 0[\quad [-2, -1[\quad [n, n+1[\quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

- Faire de même avec $h(x)$ sur les intervalles :

$$[0, 1/2[\quad [1/2, 1[\quad [1, 3/2[\quad [-1/2, 0[\quad [-1, -1/2[\quad \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right[$$

avec $n \in \mathbb{Z}$

- Faire les 3 représentations graphique de f , g , h sur l'intervalle $[-2, 3[$

Exercice 8

$$1. \text{ Mq } \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

$$2. \text{ Mq } \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \quad \text{pour } (x, y) \in \mathbb{N}^2$$

$$3. \text{ Montrer que } \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor \quad (**)$$

(Méthode : on pourra essayer avec par exemple $n = 3$ et voir ce qui se passe suivant les différentes valeurs de x dans $[0, 1[$ puis par exemple dans $[2, 3[$).