# 1 min, max

**Définition 1 : min, max**

Soient $x_1,\ \dots,\ x_n$ des réels.

$\min(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ est le plus petit de ces réels

$\max(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ est le plus grand de ces réels

**Propriété 1**

$\min(a,\ b) + \max(a,\ b) = a + b$

$\min(a,\ b) \times \max(a,\ b) = a \times b$

**Propriété 2 : inégalités**

- $\min(x_1,\ \dots,\ x_n) \leq a$

  $\iff$ $x_1 \leq a$ **ou** $x_2 \leq a \dots$ **ou** $x_n \leq a$

  $\iff$ $\exists i \in [[1, n]],\ x_i \leq a$

- $\min(x_1,\ \dots,\ x_n) \geq a$

  $\iff$ $x_1 \geq a$ **et** $x_2 \geq a \dots$ **et** $x_n \geq a$

  $\iff$ $\forall i \in [[1, n]],\ x_i \geq a$

- $\max(x_1,\ \dots,\ x_n) \leq a$

  $\iff$ $x_1 \leq a$ **et** $x_2 \leq a \dots$ **et** $x_n \leq a$

  $\iff$ $\forall i \in [[1, n]],\ x_i \leq a$

- $\max(x_1,\ \dots,\ x_n) \geq a$

  $\iff$ $x_1 \geq a$ **ou** $x_2 \geq a \dots$ **ou** $x_n \geq a$

  $\iff$ $\exists i \in [[1, n]],\ x_i \geq a$

# 2 Valeur absolue

**Définition 2 : Valeur absolue**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x,\ -x)$$

En effet,

Si $x \geq 0,\ -x \leq 0 \leq x \quad \Rightarrow \quad \max(x, -x) = x = |x|$

Si $x < 0,\ -x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -x \quad \Rightarrow \quad \max(x, -x) = -x = |x|$

**Propriété 3 : Valeur absolue**

$\forall x,\ y \in \mathbb{R}$,

- $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

  (double inégalité triangulaire)
- $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
- $|x.y| = |x|.|y|$ $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $\quad |x^n| = |x|^n$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

**Propriété 4 : équation, inéquation**

$\forall x \in \mathbb{R}$

- Si $r < 0$,

  $|x| < r$ est impossible

  $|x| > r$ est toujours vrai
- Si $r > 0$

  $|x| < r \iff -r < x < r$

  $|x| > r \iff x < -r$ ou $x > r$

**Propriété 5 : distance**

Pour $A, B$ de cordonnées respectives $a, b \in \mathbb{R}$ : $\quad |b - a| = AB$

**Propriété 6 : conséquences**

$\forall x \in \mathbb{R}$

- Pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$

§ $$|x-a| < r \iff x \in ]a-r, a+r[ \iff a-r < x < a+r$$

§ $$|x-a| > r \iff x \in \mathbb{R} \backslash [a-r, a+r] \iff x < a-r \quad \text{ou} \quad x > a+r$$

- Pour $a \leq b$, $\quad x \in [a,\ b] \iff \left| x - \dfrac{a+b}{2} \right| \leq \dfrac{|a-b|}{2}$

## 3 Partie entière

**Définition 3 : Partie entière**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique **entier** $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n+1$$

Cette entier est appelé la *partie entière* du réel $x$ est notée $\lfloor x \rfloor$
On a donc

$$\lfloor x \rfloor = n \iff \left\{ \begin{array}{c} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq x < n+1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = n + \alpha \\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in [0, 1[ \end{array} \right.$$

**Propriété 7 : partie entière**

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

**Définition 4 : approximation décimale**

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle approximation décimale de $x$ à $10^{-n}$ près par défaut (resp. par excès) les nombres $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$. Ces nombres encadrent $x$

Remarque : on montrera plus tard que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor 10^n x + 1 \rfloor}{10^n} = x,$$

ce qui fournit une suite décimale encadrant $x$ et convergeant vers $x$

## 4 Ensembles de nombres

**Propriété 8**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

**Définition 5 (notation)**

Soient $n, p$ deux entiers tels que $n \leq p$. On note

$$[[n,\ p]] = \{x \in \mathbb{N},\ n \leq x \leq p\} = \{n,\ n+1,\ \ldots,\ p-1,\ p\}$$

**Propriété 9 : propriété fondamentale de $\mathbb{N}$**

Tout sous-ensemble $A$ non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément
C'est-à-dire : il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A,\ a \leq x$
On note $a = \min A$

**Propriété 10 : principe de récurrence**

Si un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{N}$ vérifie les propriétés suivantes :

- $0 \in A$ (initialisation)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \in A$ alors $n+1 \in A$ (Hérédité)

Alors cet ensemble $A$ est égal à $\mathbb{N}$

**Définition 6 : nombre décimal**

$$x \in \mathbb{D} \iff x \text{ est décimal} \iff \text{il existe } a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{ tels que } x = \frac{a}{10^n}$$

**Définition 7 : nombre rationnel**

$x \in \mathbb{Q}$

$\iff$ $x$ est rationnel

$\iff$ il existe $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$

## 5 Équation du second degré, polynômes, racines

**Propriété 11 : Racine et factorisation**

Si $a \in \mathbb{C}$ est une racine d'un polynôme $P$ (c'est-à-dire $P(a) = 0$)

Alors

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q$ est un polynôme tel que $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P - 1$

$Q$ se calcule en développant l'expression $(x-a)Q(x)$ et en utilisant le principe d'identification :

**Propriété 12 : Identification**

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré au plus $n$ tels que :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

et $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$

Si pour une infinité de valeurs $x \in \mathbb{C}$ on a $P(x) = Q(x)$

Alors $a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ldots,\ a_0 = b_0$

**Propriété 13 : Racines d'un polynôme du second degré**

Soit le polynôme du second degré $Q(x) = ax^2 + bx + c$

Si ce polynôme admet deux racines $x_1$ et $x_2$ (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) , alors

$$Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

et $P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ et $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

## 6 Racine $n^{\text{ème}}$

**Définition 8 : Racine $n^{\text{ème}}$**

Soient $n \geq 2$ un entier et $a > 0$ un réel positif

Il existe alors un unique nombre réel positif $r$ tel que $r^n = a$

$r$ est appelé la racine $n^{\text{ème}}$ de $a$ et est noté $\sqrt[n]{a}$

Noter bien que par définition, une racine $n^{\text{ème}}$ est **toujours positive**

**Propriété 14 : Equation** $x^n = a$

| | $n$ pair | $n$ impair |
|---|---|---|
| $a > 0$ | deux solutions : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$ | solution unique : $\sqrt[n]{a}$ |
| $a < 0$ | aucune solution | solution unique : $-\sqrt[n]{-a}$ |

**Puissance et exponentielle**

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$

$\ln(x^n) = n.\ln x \quad \Rightarrow \quad x^n = \mathrm{e}^{n \ln x}$

On généralise cette formule :

**Propriété 15 : Écriture exponentielle des puissances**

Soient $a > 0$ un réel positif et $b$ un réel

On a alors $\boxed{a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}}$

**Propriété 16 : Écriture exponentielle des racines**

Soient $n \geq 2$ un entier et $a > 0$ un réel positif

On a alors $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a}$

Démonstration

Posons $x = \sqrt[n]{a}$

$\Rightarrow \quad x^n = a \quad \Rightarrow \quad n.\ln x = \ln a \quad \Rightarrow \quad \ln x = \frac{1}{n}\ln a$

$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} = x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a}$