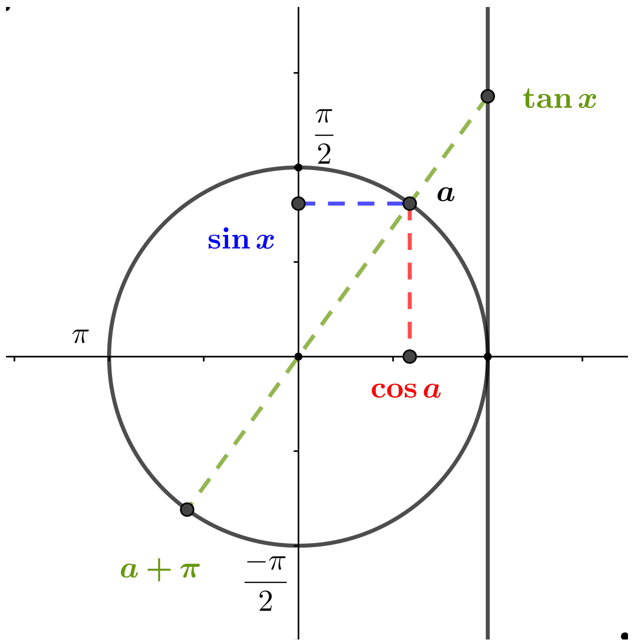
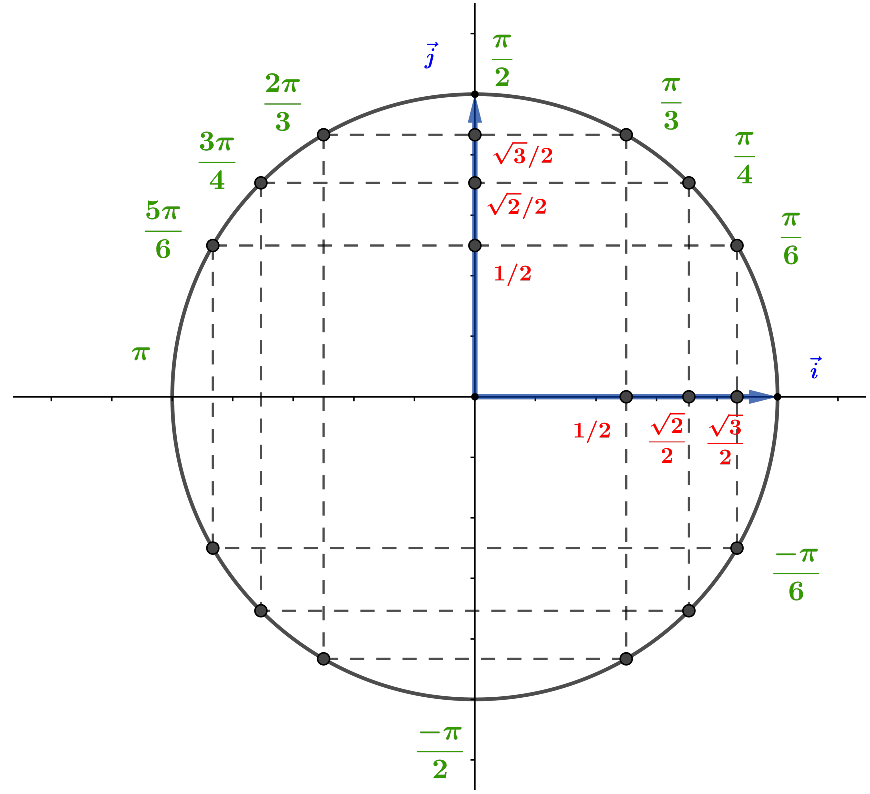
1 Lignes trigonométriques



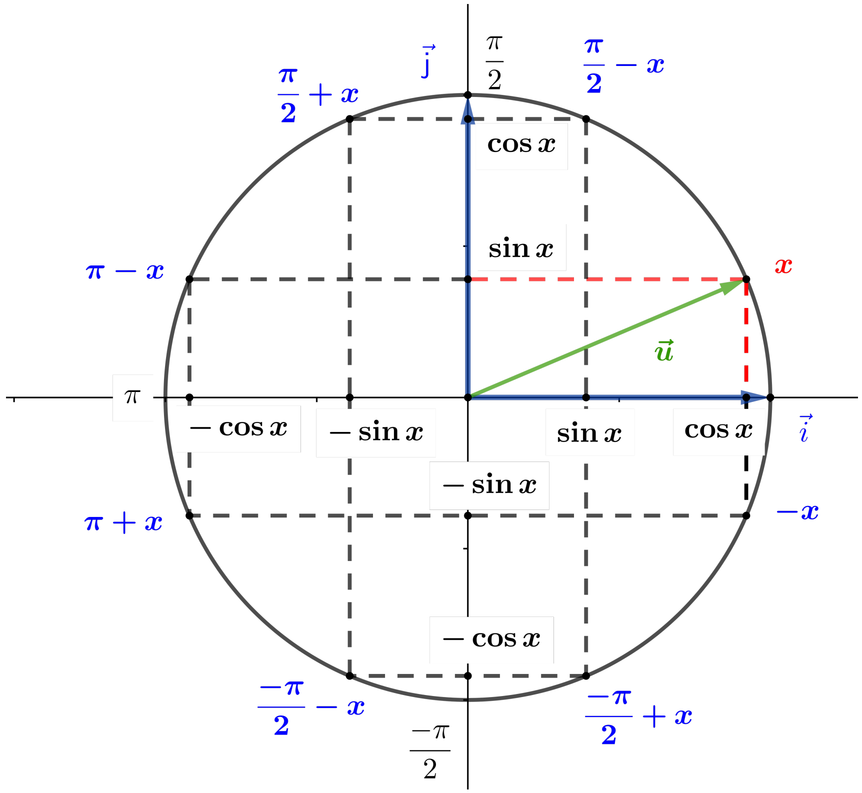
2 Angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	0



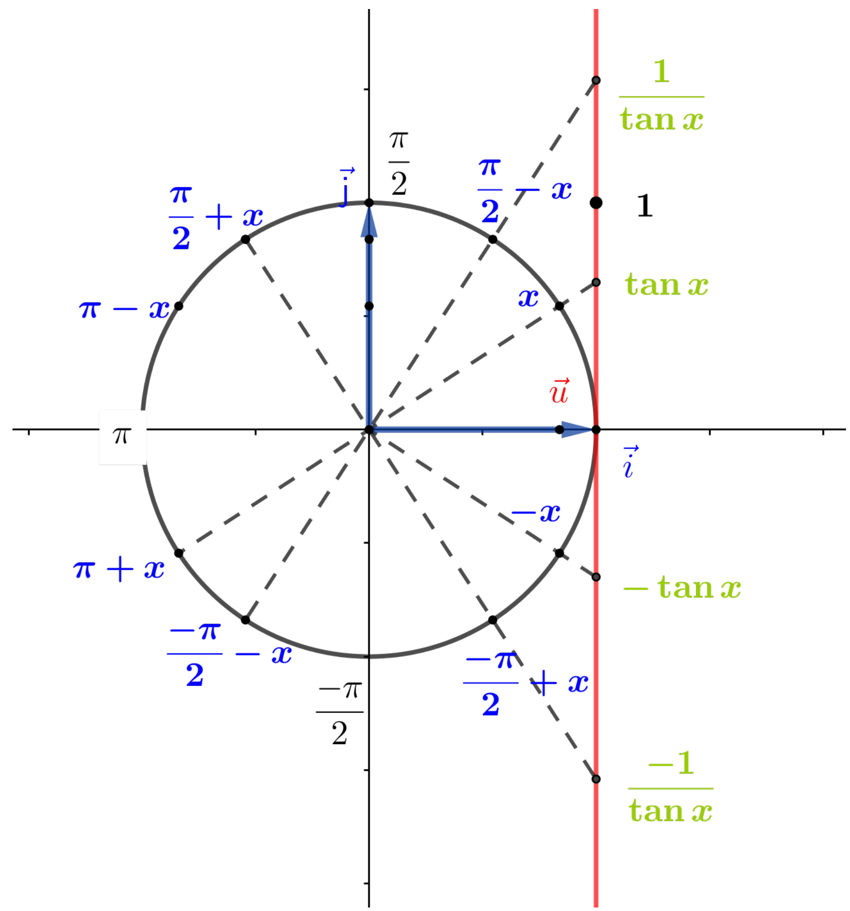
3 Angles associés

(Du type $\sin(\alpha \pm x)$ ou $\cos(\alpha \pm x)$ avec $\alpha \in \{\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\pi,\ \pm\frac{3\pi}{2}\}$
Il faut savoir les retrouver en traçant le cercle trigonométrique :



α	$-x$	$\pi+x$	$\pi-x$
$\sin\alpha$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\cos\alpha$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\tan\alpha$	$-\tan x$	$\tan x$	$-\tan x$

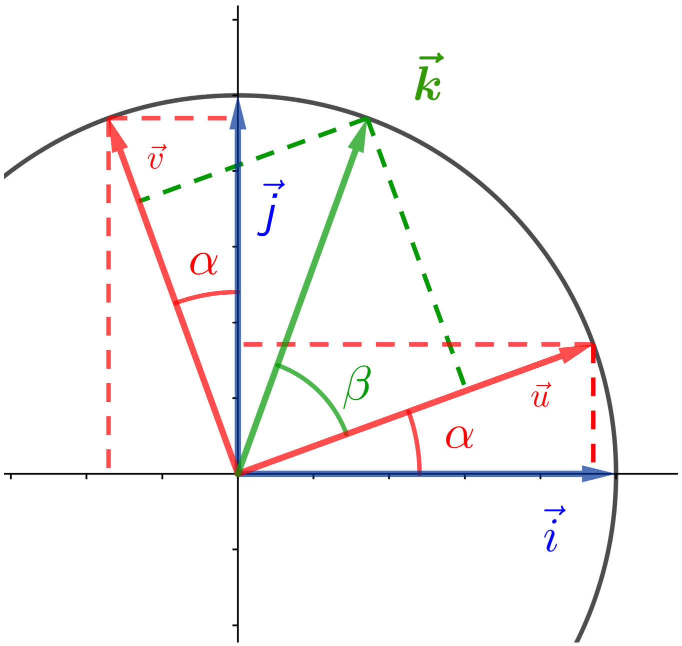
α	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\frac{-\pi}{2}-x$	$\frac{-\pi}{2}+x$
$\sin\alpha$	$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\cos\alpha$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$



Formules magiques : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x}$

Elles transforme un sinus en cosinus et inversement.

4 Formules d'addition



Propriété 1 : Formules d'addition

- $\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b$
- $\cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b$
- $\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b$
- $\sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\cos a\ \sin b$
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\ \tan b}$
- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\ \tan b}$

Démonstration
$\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$

- l'angle $(\vec{i},\vec{u})=\alpha$

  Donc $\vec{u}=\cos\alpha.\vec{i}+\sin\alpha.\vec{j}$

  De même $\vec{v}=-\sin\alpha.\vec{i}+\cos\alpha.\vec{j}$
- On a l'angle $(\vec{i},\vec{k})=\alpha+\beta$

  Donc $\vec{k}=\cos(\alpha+\beta).\vec{i}+\sin(\alpha+\beta).\vec{j}$ **(1)**
- D'autre part, on a l'angle $(\vec{u},\vec{k})=\beta$.

  D'où $\vec{k}=\cos\beta.\vec{u}+\sin\beta.\vec{v}$

  On remplace $\vec{u}$ et$\vec{v}$ par les valeurs précédentes :

$$\begin{aligned}\vec{k}&=\cos\beta.(\cos\alpha.\vec{i}+\sin\alpha.\vec{j})+\sin\beta.(-\sin\alpha.\vec{i}+\cos\alpha.\vec{j})\\&=\cos\beta.\cos\alpha.\vec{i}+\cos\beta.\sin\alpha.\vec{j}-\sin\beta.\sin\alpha.\vec{i}+\sin\beta.\cos\alpha.\vec{j}\\&=(\cos\beta.\cos\alpha-\sin\beta.\sin\alpha)\ \vec{i}+(\cos\beta.\sin\alpha+\sin\beta.\cos\alpha)\ \vec{j}\end{aligned}$$

- Par identification avec la formule **(1)**,on obtient :

$$\cos(\alpha+\beta)=cos\beta.\cos\alpha-\sin\beta.\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta.\sin\alpha+\sin\beta.\cos\alpha$$

Démo de $\tan(a+b)$

$$\begin{aligned}\tan(a+b)&=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\&=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}\\&=\frac{\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}\\&=\frac{\dfrac{\sin a}{\cos a}+\dfrac{\sin b}{\cos b}}{1-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Propriété 2 : Formules de duplication

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

D'où les expression de $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

5 Linéarisation (produit $\to$ somme)

Elle découlent des formules d'addition

Propriété 3 : Formules de linéarisation

- $\cos a \ \cos b = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$
- $\sin a \ \sin b = \dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]$
- $\sin a \ \cos b = \dfrac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]$