Propriétés algébriques incertaines

Attention Certaines ne correspondent à *aucune formule*. Le signaler alors en écrivant « *PFC* » (Pas de Formule Connue)

1) $2^n + 2^n = \quad 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ (C 002)

2) $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \quad \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (C 027b)

3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_j b_k = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right).\left(\sum_{k=1}^{p} b_k\right)$ (C 502a)

ne pas oublier les parenthèses, sinon cela n'a pas le meme sens :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{p} b_k = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \sum_{k=1}^{p} b_k\right)$$

même si cela reste égal aux formules précédentes

4) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k$ (C 502c)

Il faut changer au moins un des indices pour le faire correctement

5) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} 1 = \quad (n+1) - 3 + 1 = n - 1$ (C 509b)

6) (u_n) arithmétique $\quad\Rightarrow\quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$ (C 511a)

7) <u>Défintion</u> (u_n) est une suite géométrique de raison q. (C 514a)

$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q.u_n$

8) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pour} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{pour} \quad q = 1 \end{cases}$ (C 516a)

9) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \, \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} \quad$ pour $\quad q \neq 1$ (C 516c)

$$(\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nbre termes})}}{1 - \text{raison}}$$

$$= \frac{(1^{\text{er}} \text{ qui y est}) - (1^{\text{er}} \text{ qui n'y est plus })}{1 - \text{raison}}$$

10) Changement d'indices $\quad j = n - k \quad \iff \quad k = n - j$ (C 530c)

$\Rightarrow \quad 2k + 1 = 2n - 2j + 1 \qquad \begin{cases} k = n & j = 0 \\ k = 1 & j = n-1 \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) u_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} (2n - 2j + 1) u_j$$

11) Pour $n < p$, $\quad \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} x_j = \sum_{j=0}^{p} x_j \quad - \sum_{j=n}^{p} x_j$ (C 537a)

12) Pour $n \geq 1$, on pose $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n+20} \frac{1}{k}$ (C 538b)

Alors $\quad S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+21} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{n+20} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+21} - \frac{1}{n}$

Si on veut faire en détail, on fait apparaître les termes communs aux deux sommes : de $n+1$ à $n+20$:

$$S_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{n+21} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+21} + \sum_{k=n+1}^{n+20} \frac{1}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=n}^{n+20} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{n+20} \frac{1}{k}$$

D'où le résultat

13) Factoriser : $\quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (C 555b)

14) **Vrai ou Faux ?**.............FAUX (C 556e)

$a^5 - b^5$ est factorisable par $a + b$

Car l'expression ne s'annule pas quand on remplace b par $-a$:
$a^5 - (-a)^5 = a^5 + a^5 \neq 0$

15) **Vrai ou Faux ?**.............FAUX (C 556h)

$a^6 + b^6$ est factorisable par $a + b$

Car l'expression ne s'annule pas quand on remplace b par $-a$:
$a^6 + (-a)^6 = a^6 + a^6 \neq 0$

16) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ (C 565b)

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in [a - r,\ a + r] \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{|x - a| \leq r}$

17) $x_1 \geq a$ \ \underline{et} \ $x_2 \geq a$ ... et $x_n \geq a$ (C 588b)

$\Longleftrightarrow \quad \min(x_1,\ \ldots,\ x_n) \geq a$

18) $\min(x_1,\ \ldots,\ x_n) \geq a$ (C 589c)

$\Longleftrightarrow \quad x_1 \geq a$ **ET** $x_2 \geq a$ ET ... $x_n \geq a$

($\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i \geq a$)

19) Définition de la factorielle : $\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases}$ (C 620)

Dans une définition par récurrence il faut 1) une relation de récurrence, et ne pas oublier 2) l'<u>initialisation</u>

20) $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ (C 626b)

21) $\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \cdot \binom{n}{p} \quad$ pour $\quad 0 \leq p \leq n$ (C 629b)

22) **Formule de Pascal** : (C 631c)

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \quad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq n-1 \text{ entiers}$$

23) $(3x - 2)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (3x)^k (-2)^{n+1-k}$ (C 636c)

Ne pas oublier les parenthèses autour de $3x$ sinon c'est faux !

24) $\frac{16!}{9!8!} = \frac{1}{9} \times \frac{16!}{8!8!} = \frac{1}{9} \times \binom{16}{8}$ (C 641c)