

1 Propositions mathématiques

Une proposition est une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse.

Exemples :

- « $0 = 1$ » est une proposition (fausse)
- « 2 est un nombre positif » est une proposition (vraie)
- « tout entier admet un entier qui lui est strictement supérieur » est une proposition (vraie)
- « Il existe un entier relatif inférieur à tous les entiers relatifs » est une proposition (fausse)
- « $2+3$ » **n'est pas** une proposition logique

La proposition contraire de p est appelée « non- p »

On la note : $\neg p$ ou $\bar{p}$

« non- p » est vraie si et seulement si p est faux.

Ce qui donne la « table de vérité » élémentaire suivante :

p	non- p
V	F
F	V

2 Quantificateurs

2.1 introduction

« $x > 0$ » n'est pas en soi une proposition correcte en mathématique. En effet, il faut savoir si on veut que **tous** les x soient positifs, ou bien simplement qu'**au moins un** x soit positif. Il s'agit donc de « quantifier » cette proposition pour qu'elle ait un sens précis.

Il faut de plus savoir dans quel ensemble on « prend » les x

On écrira alors :

« Tous les x réels sont tels que $x > 0$ »

ou

« Il existe (au moins) un x réel tel que $x > 0$ »

Ce qui se notera respectivement :

$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ (Proposition fausse)

$\exists x \in \mathbb{R}, x > 0$ (Proposition vraie)

$\exists x$	Il existe x tel que
$\forall x$	Quelque soit x ; Pour tout x

ATTENTION : On ne peut pas commuter les quantificateurs $\exists$ et $\forall$

$(\forall y \in E, \exists x \in E) \neq (\exists x \in E, \forall y \in E)$

- $(\forall y \in E, \exists x \in E)$ Pour tout y , on peut trouver un x et x **peut dépendre** de y .
- $(\exists x \in E, \forall y \in E)$ On peut trouver un x qui « marche » pour tous les y . C'est **le même** x qui va marcher pour tous les y .

En fait, on a : $(\exists x \in E, \forall y \in E) \Rightarrow (\forall y \in E, \exists x \in E)$

La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemples :

- $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, x > y$ est vraie
- $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x > y$ est fausse

2.2 Propositions paramétrées

Propriété 1

|| Si une variable dans une proposition est précédé d'un quantificateur, alors la proposition ne dépend pas de cette variable.

Exemples

- $\forall x \in \mathbb{R}, x > y$ Cette proposition ne dépend que de la variable y .
On peut donc la noter $P(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in A, x > y$ Cette proposition ne dépend que de la variable A (qui est un ensemble).
On peut la noter $P(A)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y$ Cette proposition ne dépend de rien.
On peut la noter P

2.3 Négation d'une proposition quantifiée

On remplace dans l'ordre chaque quantificateur par l'autre quantificateur. Puis on prend la négation de la proposition finale.

Exemples :

proposition	Sa négation
$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$	$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y$
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$
$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$	$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \geq y$

2.4 Démonstrations

- **Démonstration d'universalité** : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$

Soit $x \in E$

...

On a $\mathcal{P}(x)$

- **Démonstration d'existence** : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$

On la fait en général en deux parties :

1) Partie heuristique

Cherchons $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$...

2) Vérification (Partie proprement démonstrative)

Prenons $x = \dots$

...

On a $x \in E$ et $\mathcal{P}(x)$

Donc : $\exists x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$

Dans la pratique, on peut éluder la partie heuristique (quand la recherche de x ne pose pas de problème)

2.5 « aucun »

On a vu qu'il n'y avait que deux quantificateurs : l'existentiel (au moins un) et universel (tout le monde). C'est un peu sommaire direz-vous. Certes, mais ces deux quantificateurs permettent de traduire tout le reste. Par exemple on peut avoir envie de dire : « aucun »

« Aucun x ne vérifie la propriété $\mathcal{P}(x)$ »

se traduit par :

$\forall x, \neg \mathcal{P}(x)$

2.6 Unicité

Voir après l'implication

3 Connecteurs logiques

A partir de différentes propositions logiques, on peut en construire d'autres à partir des connecteurs logiques.

- $p \wedge q$: « p et q » est vrai si et seulement si p et q le sont (en même temps).
- $p \vee q$: « p ou q » est vrai si p ou q le sont

Remarque : c'est le « ou inclusif » : on peut avoir simultanément p et q vrais ou seulement l'un des deux.

Tout cela est résumé par les tables de vérité :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Propriété 2 : Lois de Morgan

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \end{aligned}$$

(Le symbole $\equiv$ signifie que les propositions complexes de chaque côté de ce signe ont les mêmes tables de vérité, ou encore que celle de gauche est vraie si et seulement si celle de droite l'est aussi)

4 L'implication

Exemple : prenons la propositions suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 9) \quad \text{qui intuitivement est :}$$

Remplir le tableau suivant avec les valeurs de vérité :

$x =$	$x \geq 3$	$x^2 \geq 9$	$(x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 9)$
5	V	V	V
2	F	F	V
-4	F	V	V

Considérons maintenant la proposition suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 25) \quad \text{qui intuitivement est :}$$

Remplir le tableau suivant avec les valeurs de vérité :

$x =$	$x \geq 3$	$x^2 \geq 25$	$(x \geq 3) \Rightarrow (x^2 \geq 25)$
6	V	V	V
-4	F	F	V
-6	F	V	V
2	V	F	F

On obtient donc la table de vérité suivante

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On remarque que si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelle que soit la valeur de Q .

La seule chose à laquelle sert l'implication est la suivante :

Si $P \Rightarrow Q$ est **vraie** et si P est **vraie**,
alors Q est également **vraie**.

On dit que

Définition 1 : Condition nécessaire / suffisante

Si on a $P \Rightarrow Q$

P est une condition **suffisante** de Q

Q est une condition **nécessaire** de P

Par exemple : $(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$

Cette implication est toujours vraie (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

Si $x = 0$, alors on est sûr que $xy = 0$

Par contre, si $x \neq 0$, alors on ne peut rien dire sur le produit xy : on peut aussi bien avoir $xy = 0$ que $xy \neq 0$.

$(x = 0)$ est une condition suffisante de $(xy = 0)$

$(xy = 0)$ est une condition nécessaire de $(x = 0)$

Une implication est vraie si et seulement si P est fausse OU Q est vraie :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$$

4.1 Négation d'une implication

En appliquant les formule de Morgan, on obtient :

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$$

Une implication est fausse si le premier terme est vrai et que le deuxième ne l'est pas.

4.2 Contraposée

Reprenons l'exemple précédent : $(x = 0) \Rightarrow (xy = 0)$

Si on a : $xy \neq 0$, alors on peut affirmer que $x \neq 0$

On a donc : $(xy \neq 0) \Rightarrow (x \neq 0)$

C'est ce qu'on appelle la **contraposée** : $[p \Rightarrow q] \equiv [\neg q \Rightarrow \neg p]$

Exemples d'utilisation : par contraposée

$$[x \in A \cap B \Rightarrow x \in A] \text{ devient : } [x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B]$$

$$[x \in A \Rightarrow x \in A \cup B] \text{ devient } [x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A]$$

4.3 Démonstration d'une implication : $[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$

- Simple
Supposons $\mathcal{P}$
...
on a $\mathcal{Q}$
- Par contraposée
Montrons $\text{non-}\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non-}\mathcal{P}$
Supposons $\text{non-}\mathcal{Q}$, (montrons $\text{non-}\mathcal{P}$)
...
On a donc $\text{non-}\mathcal{P}$
D'où : $\text{non-}\mathcal{Q} \Rightarrow \text{non-}\mathcal{P}$
Donc, par contraposée : $[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$
- Par l'absurde
On suppose à la fois $\mathcal{P}$ et $\text{non-}\mathcal{Q}$ et on montre que c'est impossible :
Supposons $\mathcal{P}$ et $\text{non-}\mathcal{Q}$
...
Impossible
Donc $[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$

4.4 Démonstration d'implications complexes

1. $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$

Supposons $P \text{ ou } Q$	
1er cas : on a P	2ème cas : on a Q
...	...
on a R	on a R
Dans tous les cas, on a R	
Donc $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$	

2. $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$

Supposons P	
On a Q	ou non- Q
1er cas : on a Q on a alors $Q \text{ ou } R$	2ème cas : on a non- Q (cad Q est faux) ... on a R donc on a $Q \text{ ou } R$
Dans tous les cas : $Q \text{ ou } R$	
Donc $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$	

4.5 Équivalence : $[\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}]$

On a : $p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Ce qui donne le tableau de vérité suivant :

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Pour démontrer une équivalence $[p \Longleftrightarrow q]$, il faut en général démontrer la double implication : $[p \Rightarrow q]$ et $[q \Rightarrow p]$

Avoir :

$$[p \Longleftrightarrow q]$$

revient à dire que :

« q est une condition nécessaire et suffisante (CNS) de p »

4.6 Existence et unicité

« Il existe un **unique** x vérifiant $\mathcal{P}(x)$. »

On décompose la démonstration en deux parties :

- l'existence (il en existe au moins un)
- et l'unicité (il en existe au plus un)

Comment traduire l'unicité ?

Elle signifie qu'on ne peut avoir deux éléments **distincts** x et y d'un ensemble A vérifiant $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$

On a donc :

$$\neg(\exists x \in A, \exists y \in A, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } x \neq y)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \neg(\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } x \neq y)$$

ou encore

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \neg[\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)] \text{ ou } (x = y)$$

On reconnaît là une implication (car : $(\neg p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$)

Ce qui donne :

Au plus un un élément de A vérifie $\mathcal{P}$ (« unicité ») :

$$\forall x \in A, \forall y \in A, [\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)] \Rightarrow (x = y)$$

Démonstration de l'« unicité » : « x tel que $\mathcal{P}(x)$ est unique (s'il existe) »

Soient x et y vérifiant $\mathcal{P}$

On a $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$

...

Alors a $x = y$

Donc, s'il existe x tel que $\mathcal{P}(x)$, alors x est unique

(ou encore : il existe au plus un x tel que $\mathcal{P}(x)$)

ATTENTION

Pour montrer « Il existe un unique x tel que $\mathcal{P}(x)$ », il faut montrer deux choses :

1°) L'existence : il existe au moins un x tel que $\mathcal{P}(x)$.

2°) L'« unicité » : Il existe au plus un x tel que $\mathcal{P}(x)$.

Autre méthode : par analyse-synthèse

1°) Analyse :

Supposons qu'il existe x tel que $\mathcal{P}(x)$

...

Alors $x = x_0$

(Cela prouve que x_0 est le seul x possible. Cela ne prouve pas que x_0 marche. En effet, on a supposé au départ que x marchait.)

2°) Synthèse :

Montrons que x_0 vérifie la propriété P

...

On a bien $P(x_0)$

Exemple : Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application

Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$h = f + g$, f est paire et g est impaire.