

1 Les ensembles

1.1 définitions d'ensembles

Définition d'un ensemble

- par extension :

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- ou par compréhension :

$$A = \{t \in \mathbb{R}, t^2 < 1\}$$

$$B = \{t \in \mathbb{R}, \exists x \in [-2, 1], t = 2x + 3\}$$

$$C = \{2x + 3, x \in [-2, 1]\}$$

$$D = \{x, 2x + 3 \in [-2, 1]\}$$

Donner sous forme d'intervalles les ensembles précédents

1.2 Opérations

Définition 1 : Opérations

- Intersection : $A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- union : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- différence : $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
 $A \setminus B$ est appelé le complémentaire de B dans A
- Si on se place dans un « grand ensemble » Ω , on peut définir le complémentaire de A :

$$\overline{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\} = \Omega \setminus A$$

Définition 2 : Ensemble vide

$$\begin{aligned} A = \emptyset &\iff \forall x, x \notin A \\ &\iff \forall x, (x \in A \text{ est impossible}) \end{aligned}$$

Définition 3 : Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$

Généralisations

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E .

- L'intersection de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à chacun des deux ensembles

Alors l'intersection des A_i est l'ensemble des éléments appartenant à chacun des A_i :

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

- L'union de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins de ces deux ensembles.

Alors l'union des (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à au moins un des A_i :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$$

Définition 4 : inclusion, égalité

$$\begin{aligned} A \subset B &\iff \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \\ &\iff \forall x \in A, x \in B \end{aligned}$$

Quand $A \subset B$, on dit que A est un sous-ensemble de B ou bien que A est une partie de B

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

1.3 Démonstrations

- $x \notin A$

Pour démontrer $x \notin A$, il peut être intéressant de supposer que $x \in A$, et ensuite de montrer que cela est impossible

Montrons que $x \notin A$
 Par l'absurde : supposons $x \in A$
 ...
 Impossible
 Donc $x \notin A$

- $A \subset B$

Montrons $A \subset B$

Soit $x \in A$ (montrons que $x \in B$)

...

D'où $x \in B$

Donc $A \subset B$

• $A = B$

On montre la double inclusion :

Montrons que $A \subset B$

...

Montrons que $B \subset A$

...

$A \subset B$ et $B \subset A$. Donc $A = B$.

• $A = \emptyset$

Soit $x \in A$

...

Impossible

Donc $A = \emptyset$

1.4 Produit (cartésien) d'ensembles

Définition 5 : Produit de 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de A et B et on note $A \times B$ l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$$

$$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \iff (x \in \mathbb{N} \text{ et } y \in \mathbb{R})$$

Définition 6 : Produit de n ensembles

On définit de la même façon le produit de n ensembles $A_1, \dots, A_n$:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ = \{(a_1, \dots, a_n) / a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\} \end{aligned}$$

$(a_1, \dots, a_n)$ est appelé un n -uplet

Définition 7 : Égalité de deux n -uplets

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

$$\iff \forall i \in [[1, n]], a_i = b_i.$$

Définition 8 : cas du même ensemble

On note E^n l'ensemble $E \times E \times \dots \times E$ (n fois)

$$(a_1, \dots, a_n) \in E^n \iff \forall i \in [[1, n]], a_i \in E$$

Exemple 1 : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \iff a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

Exemple 2 :

$$u \in \mathbb{R}^2 \iff \text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ tels que } u = (a, b)$$

1.5 Ensemble des parties de E

Définition 9

Soit E un ensemble

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles (ou parties) de E

Exemple : $E = \{a, b\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensembles. Il contient en particulier E et $\emptyset$

Curiosité : si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Donc l'ensemble des parties de l'ensemble vide n'est pas vide. Il contient un unique élément qui est l'ensemble vide.

Il ne faut donc pas confondre $\emptyset$ avec $\{\emptyset\}$

2 Applications (ou fonctions)

2.1 Définitions

Définition 10 : Application

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F fait correspondre à tout élément x de E un unique élément y de F qu'on note $f(x)$.

On écrit alors :

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

- E est appelé l'ensemble de départ de f
- F est appelé l'ensemble d'arrivée de f .
- y est appelé **L'**image de x par f
- x est appelé **UN** antécédent de y par f .

Tout élément de E admet une *unique image* dans F par f .

Par contre, un élément de F peut admettre aucun, un seul ou plusieurs antécédent(s) par f .

Attention : Il est essentiel de distinguer f et $f(x)$

- f est une **application**
- $f(x)$ est l'**image** de x par f , c'est-à-dire un **élément** de F

Par exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$
 f est une application $f(x)$ est un réel

2.2 Diagramme sagittal

2.3 Égalité de deux applications

Définition 11 : Égalité de deux applications

Deux applications f et g sont égales si et seulement si :

- elles ont même ensemble de départ
- elles ont même ensemble d'arrivée
- elles coïncident sur leur ensemble de départ E :
 $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

Exemple :

Soient les applications f, g, h et i suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2$$

Aucune de ces applications n'est égale à une autre.

- Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent au moins un antécédent ?
pour f, g faux pour h, i vrai
- Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent au plus un antécédent ?
 f, h faux car, par exemple, 4 a deux antécédents 2 et -2 pour g, i : vrai
- Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée admettent un unique antécédent ?

Ce n'est vrai que pour i
 i est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$

$$j : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$$

Tout y de $\mathbb{R}^+$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}^-$ qui est $-\sqrt{y}$
 j est aussi une bijection.

Définition 12 : Bijection

L'application $f : E \rightarrow F$ est une bijection si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée (F) admet un **unique** antécédent par f dans l'ensemble de départ (E).

2.4 Composée de deux applications

Définition 13 Composée d'applications

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

On appelle « composée de f et g » l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : E \rightarrow G, x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Cette dernière écriture n'est pas un simple jeu de déplacement de parenthèses :

- x est un élément de E ,
 $g \circ f$ est une application de E dans G
et $(g \circ f)(x)$ est un élément de G
- x est un élément de E ,
 $f(x)$ est un élément de F ,
 $g[f(x)]$ est un élément de G .

Exemple 1 : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x$ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$

Déterminer $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g[x^2 + x] = x^2 + x + 1 \\ f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f[x + 1] = (x + 1)^2 + (x + 1) \\ &= x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Exemple 2 : Idem avec $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1, g(x) = x/2 - 1/2$

En général, on a donc $f \circ g \neq g \circ f$. (On dira que la composée des applications n'est pas *commutative*). Par contre :

Propriété 1 : associativité

Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow H$, trois applications.
On a alors : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
(La composée des applications est *associative*).

Démonstration

- $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont deux applications de E dans H (trivial)
- Soit $x \in E$,
 $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g[f(x)]]$
D'autre part
 $[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))]$
On a donc bien $\forall x \in E, [(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x)$
- Conclusion $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

2.5 opérations

Définition 14 : somme et produit

Soient f et g deux applications de E dans $\mathbb{R}$

On définit les applications suivantes :

- $f + g : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f \cdot g : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
 $a \cdot f + b \cdot g : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (a \cdot f + b \cdot g)(x) = a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$
 $(a \cdot f + b \cdot g)$ est appelée une « combinaison linéaire » de f et g

De nouveau, on a plus qu'un jeu d'écriture : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

- $f + g$ est une somme de deux *applications*
- $f(x) + g(x)$ est la somme de deux *réels*.