

Exercice 1

On donne : $3 < a < 7$ et $5 < b < 8$. Encadrer :

$$A = 3a - 2b; \quad B = \frac{a - 10}{b}$$

$$\begin{aligned} 3 < a < 7 &\Rightarrow 9 < 3a < 21 \\ \bullet \quad 5 < b < 8 &\Rightarrow -16 < -2b < -10 \\ &\Rightarrow -7 < 3a - 2b < 11 \end{aligned}$$

$$\boxed{-7 < A < 11}$$

$$\begin{aligned} 3 < a < 7 &\Rightarrow -7 < a - 10 < -3 \\ \bullet \quad 5 < b < 8 &\Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \end{aligned}$$

On ne pas multiplier car tout n'est pas positif. Mais :

$$\begin{aligned} 3 &< 10 - a < 7 \\ \frac{1}{8} &< \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \\ \Rightarrow \frac{3}{8} &< \frac{10 - a}{b} < \frac{7}{5} \quad \text{car tout est positif} \\ \Rightarrow \frac{-7}{5} &< \frac{a - 10}{b} < \frac{-3}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{-7}{5} < B < \frac{-3}{8}}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x + 1 < \sqrt{2x + 5}$

• L'équation est définie si $2x + 5 \geq 0 \iff x \geq \frac{-5}{2}$

$$D = [-5/2, +\infty[$$

• Premier cas : $x + 1 < 0 \iff \frac{-5}{2} \leq x < -1$

Dans ce cas, $x + 1 < 0$ et $\sqrt{2x + 5} \geq 0$

Donc $x + 1 < \sqrt{2x + 5}$ est toujours vrai

$$S_1 = \left[\frac{-5}{2}, -1 \right[$$

• 2ème cas : $-1 \leq x \iff x + 1 \geq 0$

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff x + 1 < \sqrt{2x + 5} \\ &\iff (x + 1)^2 < 2x + 5 \quad \text{car tout est positif} \\ &\iff x^2 + 2x + 1 < 2x + 5 \\ &\iff x^2 - 4 < 0 \\ &\iff x^2 < 4 \\ &\iff -2 < x < 2 \end{aligned}$$

Or $x \geq -1$

Donc $S_2 =]-1, 2[$

• Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{-5}{2}, 2 \right[$

2) $|x + 2| \geq 2x + 7$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$

• 1er cas : $x < -2$

Alors $x + 2 < 0 \Rightarrow |x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$

Donc

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff -x - 2 \geq 2x + 7 \\ &\iff -3x \geq 9 \\ &\iff x \leq -3 \end{aligned}$$

Or $x < -2$

Donc $S_1 =]-\infty, -3]$

• 2ème cas : $-2 \leq x$

Alors $|x + 2| = x + 2$

Donc

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff x + 2 \geq 2x + 7 \\ &\iff -x \geq 5 \\ &\iff x \leq -5 \end{aligned}$$

Or $x \geq -2$

Donc $S_2 = \emptyset$

• **Conclusion** : $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -3]$

Autre méthode : (que j'aime moins car peu généralisable) :

On utilise $|a| = \max(a, -a)$

Donc

$$|a| \geq b \iff \max(a, -a) \geq b \iff a \geq b \text{ OU } -a \geq b$$

On a donc

$$(E) \iff |x+2| \geq 2x+7 \\ \iff x+2 \geq 2x+7 \text{ OU } -(x+2) \geq 2x+7$$

• 1er cas

$$x+2 \geq 2x+7$$

$$\iff -x \geq 5$$

$$\iff x \leq -5$$

$$S_1 =]-\infty, -5]$$

• 2ème cas :

$$-(x+2) \geq 2x+7$$

$$\iff -x-2 \geq 2x+7$$

$$\iff -3x \geq 9$$

$$\iff x \leq -3$$

$$S_2 =]-\infty, -3]$$

• Conclusion

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -3]$$

$$3) \left[\frac{x}{x-1} < \frac{3x+2}{2x} \right]$$

L'équation est définie pour $x-1 \neq 0$ et $2x \neq 0$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$(E) \iff \frac{x}{x-1} < \frac{3x+2}{2x} \\ \frac{x}{x-1} - \frac{3x+2}{2x} < 0 \\ \frac{(2x)x}{2x(x-1)} - \frac{(3x+2)(x-1)}{2x(x-1)} < 0 \\ \frac{2x^2 - (3x^2 + 2x - 3x - 2)}{2x(x-1)} < 0 \\ \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)} < 0$$

$$N(x) = -x^2 + x + 2$$

$$\text{Racine évidente } x_1 = -1 \quad x_1 x_2 = P = \frac{c}{a} = -2 \Rightarrow x_2 = 2$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$-$
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$Q(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\text{Donc } S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]2, +\infty[$$

Exercice 3

$$1) \text{ Calculer } S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) \text{ pour } n \geq 1$$

(On donnera l'expression factorisée la plus simple possible)

$$S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (i+j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (i+j) \text{ On choisira la deuxième écriture (car il est plus facile de calculer les sommes commençant à 1)}$$

$$\text{Calculons d'abord } T_j = \sum_{i=1}^j (i+j)$$

$$T_j = \sum_{i=1}^j i + \sum_{i=1}^j j \\ = \frac{j(j+1)}{2} + j \times j \\ = \frac{j^2 + j + 2j^2}{2} \\ = \frac{3j^2 + j}{2}$$

Donc

$$S_n = \sum_{j=1}^n T_j \\ = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j \\ = \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} [(2n+1) + 1] \\
&= \frac{n(n+1)}{4} (2n+2) \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2}
\end{aligned}$$

2) Vérifier le résultat obtenu pour $n = 3$

Pour $n = 3$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^j (i+j) \\
&= \sum_{i=1}^1 (i+1) + \sum_{i=1}^2 (i+2) + \sum_{i=1}^3 (i+3) \\
&= 2 + (3+4) + (4+5+6) = 2 + 7 + 15 = 24
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{n(n+1)^2}{2} = \frac{3 \times 4^2}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

Ca marche !

Exercice 4

On veut calculer $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

a) Démontrer la formule suivante :

Pour $1 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$

$$\begin{aligned}
\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} &= \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! ((n-1) - (k-1))!} \\
&= \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! ((n-k))!} \\
&= \frac{n!}{k! ((n-k))!} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

b) En déduire la valeur de S_n .

On en déduit $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

D'où

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} + 0 \times \binom{n}{0} \quad \text{on a sorti le terme pour } k=0 \text{ car la formule} \\
&\quad \text{qu'on sodoit utiliser ne marche que pour } k \geq 1
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \quad \text{d'après la formule précédente}$$

Changement d'indice $j = k - 1$ Bornes : $\begin{cases} k = n & j = n - 1 \\ k = 1 & j = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \\
&= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 1^j \cdot 1^{n-1-j} \\
&= n \cdot 2^{n-1} \quad \text{Binôme de Newton}
\end{aligned}$$

c) Vérifier la formule obtenue pour $n = 3$

Pour $n = 3$:

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{k=0}^3 k \binom{3}{k} \\
&= 0 \times \binom{3}{0} + 1 \times \binom{3}{1} + 2 \times \binom{3}{2} + 3 \times \binom{3}{3} \\
&= 0 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = 12
\end{aligned}$$

Et $n \cdot 2^{n-1} = 3 \times 2^2 = 12$

Ca marche !

Exercice 5

On pose $S_n = 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) \cdots + n \times 1$

1) Écrire S_n sous forme d'une somme

$$S_n = \sum_{i=1}^n i(n+1-i)$$

Vérifions :

pour $i = 1 : 1 \times (n + 1 - i) = 1 \times n$

pour $i = 2 : i(n + 1 - i) = 2 \times (n - 1)$

Pour $i = n : i(n + 1 - i) = n \times 1$ Ca marche

2) Calculer S_n

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^n i(n+1-i) \\
 &= \sum_{i=1}^n [i(n+1) - i^2] \\
 &= (n+1) \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= (n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} (3(n+1) - (2n+1)) \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} (n+2) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
 \end{aligned}$$

3) Vérifier le résultat pour $n = 3$

Pour $n = 3$

$$S_3 = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 3 + 4 + 3 = 10$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{3.4.5}{6} = \frac{60}{6} = 10 \quad \text{Gagné!}$$

Exercice 6

1) On donne $u_n = \left(\frac{3^{n-1}}{e^{2n+1}} \right)^3$

Écrire u_n sous la forme $a \times q^n$ où a et q sont des constantes

$$\begin{aligned}
 u_n &= \left(\frac{3^{n-1}}{e^{2n+1}} \right)^3 \\
 &= \frac{3^{3(n-1)}}{e^{3(2n+1)}} \\
 &= \frac{3^{3n} 3^{-3}}{e^{6n} e^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3^{3n} 3^{-3}}{e^{6n} e^3} \\
 &= \frac{1}{3^3 e^3} \left(\frac{3^3}{e^6} \right)^n
 \end{aligned}$$

2) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{3^{k-1}}{e^{2k+1}} \right)^3$

D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \\
 &= \frac{1}{3^3 e^3} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{3^3}{e^6} \right)^k . 1^{n-k} \\
 &= \frac{1}{3^3 e^3} \left(\frac{3^3}{e^6} + 1 \right)^n \quad (\text{Binôme de Newton}) \\
 &= \frac{1}{3^3 e^3} \left(\frac{3^3}{e^6} + 1 \right)^n
 \end{aligned}$$