 FE 06a (Complexes)

Exercice 1 Bijections

- Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to E, x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$ Chercher les antécédents de y quand ils existent
  En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash -2$ sur un ensemble E qu'on déterminera.
  Donner l'expression alors de la réciproque de f qui a tout élément de E associe son antécédent
- Mêmes question avec $f : \mathbb{R}^- \to E, x \mapsto \exp(-x^2)$
- Idem avec $f : \mathbb{R} \to E, x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (*)

Exercice 2 Composées

- Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
  Déterminer les domaines de définition de $f, g, f \circ g, g \circ f, f \circ f$ et calculer ces fonctions
- Mêmes questions avec $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

Exercice 3 Nombres complexes

1. (Forme algébrique) Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique : *a)* $\dfrac{2+3\mathbf{i}}{-4+\mathbf{i}}$, *b)* $\dfrac{3+7\mathbf{i}}{1-3\mathbf{i}}$, *c)* $\dfrac{2-3\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} + \dfrac{2+3\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$
2. (complexes de module 1) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.
3. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :
   a) $z_1 = -7 + 7\mathbf{i}$ b) $z = \sin a - \mathbf{i}\cos a$ où $a \in \mathbb{R}$
   c) $z = -\cos a + \mathbf{i}\sin a$ d) $z = \dfrac{\cos a - \mathbf{i}\sin a}{\sin a - \mathbf{i}\cos a}$
4. Calculer sous forme trigonométrique puis algébrique
   a) $z_1 = (-2-2\mathbf{i})^7$ b) $z_2 = \left(\dfrac{3-3\mathbf{i}}{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}\right)^8$

Exercice 1 Bijections

- Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to E, x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$ Chercher les antécédents de y quand ils existent
  En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash -2$ sur un ensemble E qu'on déterminera.
  Donner l'expression alors de la réciproque de f qui a tout élément de E associe son antécédent
- Mêmes question avec $f : \mathbb{R}^- \to E, x \mapsto \exp(-x^2)$
- Idem avec $f : \mathbb{R} \to E, x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (*)

Exercice 2 Composées

- Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
  Déterminer les domaines de définition de $f, g, f \circ g, g \circ f, f \circ f$ et calculer ces fonctions
- Mêmes questions avec $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

Exercice 3 Nombres complexes

1. (Forme algébrique) Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique : *a)* $\dfrac{2+3\mathbf{i}}{-4+\mathbf{i}}$, *b)* $\dfrac{3+7\mathbf{i}}{1-3\mathbf{i}}$, *c)* $\dfrac{2-3\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} + \dfrac{2+3\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$
2. (complexes de module 1) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.
3. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :
   a) $z_1 = -7 + 7\mathbf{i}$ b) $z = \sin a - \mathbf{i}\cos a$ où $a \in \mathbb{R}$
   c) $z = -\cos a + \mathbf{i}\sin a$ d) $z = \dfrac{\cos a - \mathbf{i}\sin a}{\sin a - \mathbf{i}\cos a}$
4. Calculer sous forme trigonométrique puis algébrique
   a) $z_1 = (-2-2\mathbf{i})^7$ b) $z_2 = \left(\dfrac{3-3\mathbf{i}}{1+\sqrt{3}\mathbf{i}}\right)^8$