1 Nombres complexes

Définition 1 : nombre complexe

Un nombre complexe z s'écrit sous **forme algébrique** $z = a + b.\mathbf{i}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{i}$ un nombre tel que $\mathbf{i}^2 = -1$

a est appelé la **partie réelle** de z et b sa **partie imaginaire** ;

On note : $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$

- Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors z est réel
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et on note $\boxed{z \in \mathbf{i}.\mathbb{R}}$

Propriété 1 : Égalité

$z_1 = z_2 \iff \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$

Propriété 2 : Parties réelles, imaginaires

$\forall(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall(z_1,\ z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\mathrm{Re}(a.z_1 + b.z_2) = a.\mathrm{Re}(z_1) + b.\mathrm{Re}(z_2)$$

$$\mathrm{Im}(a.z_1 + b.z_2) = a.\mathrm{Im}(z_1) + b.\mathrm{Im}(z_2)$$

En particulier

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$$

$$\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$$

Attention : ça ne marche pas pour le produit complexe :

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1).\mathrm{Re}(z_2)$$

Définition 2 : Affixe d'un point, d'un vecteur

Soit $z = a + b.\mathbf{i}$ un nombre complexe.

- On dit qu'un point M du plan a pour affixe z s'il a pour coordonnées $(a,\ b)$ dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On note alors $M(z)$
- On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour affixe s s'il a pour coordonnées(a, b) dans le même repère c'est-à-dire : $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j}$
  On note $\vec{u}(z)$

Interprétation géométrique : somme, produit par un réel.

2 Conjugué

Définition 3 : Conjugué

$\forall(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall z \in \mathbb{C}\quad \overline{z} = \overline{a + \mathbf{i}.b} = a - \mathbf{i}.b$

Interprétation géométrique

Propriété 3 : Compatibilité avec les opérations

$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall(z, z') \in \mathbb{C}^2$

- $\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{a.z + b.z'} = a.\overline{z} + b.\overline{z'}$
- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'} \qquad$ Pour $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- pour $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = (\ \overline{z}\ )^n$

Propriété 4 : parties imaginaires, réelles

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}}$

$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

$z \in \mathbf{i}.\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

3 Module

Définition 4 : Module

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Propriété 5

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |a + \mathbf{i}.b| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriété 6 : Interprétation géométrique

Si $M(z)$, alors $|z| = OM$

Si $\vec{u}(z)$ alors $|z| = \|\vec{u}\|$

Si $A(a)$ et $B(b)$ alors $|b-a| = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

Propriété 7 : compatibilité avec les opérations

$z = 0 \iff |z| = 0$

$|\overline{z}| = |z| \qquad |z.z'| = |z|.|z'| \qquad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$\forall n \in \mathbb{Z},\ |z^n| = |z|^n$

Attention : marche pas bien avec somme et différence

Propriété 8 : Inverse

Si $z \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Propriété 9 : Double inégalité triangulaire

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\quad \big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$

Propriété 10 : Cas d'égalité

$$|z+z'| = |z| + |z'|$$

$\iff \quad z' = 0$ ou $z' = \alpha.z$ avec α <u>réel positif</u>

Interprétation géométrique

<u>Démonstration</u>

1) Montrons d'abord $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

§ Procédons par équivalence :
Le deux termes de l'inégalité sont positifs, donc

$$
\begin{aligned}
& |z+z'| \leq |z| + |z'| \\
\iff \quad & |z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 \\
\iff \quad & (z+z')(\overline{z+z'}) \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\
\iff \quad & (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\
\iff \quad & z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \leq z\overline{z} + 2|z||z'| + z'\overline{z'} \\
\iff \quad & z\overline{z'} + z'\overline{z} \leq 2|z||z'| \\
\iff \quad & z\overline{z'} + \overline{\overline{z\overline{z'}}} \leq 2|z||\overline{z'}| \\
\iff \quad & 2.\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq 2|z\overline{z'}| \\
\iff \quad & \mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|
\end{aligned}
$$

§ Posons $Z = z\overline{z'} = a + \mathbf{i}b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

et montrons que $\mathrm{Re}(Z) \leq |Z|$

On a $|Z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$ et $|a| \geq a$

D'où $|Z| \geq \mathrm{Re}(Z)$

Et donc $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$

Ce qui prouve l'inégalité

2) Profitons-en pour déterminer le cas d'égalité : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
D'après ce qui précède :

$$
\begin{aligned}
& |z+z'| = |z| + |z'| \\
\iff \quad & |Z| = \mathrm{Re}(Z) \\
\iff \quad & \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} \quad \text{et} \quad |a| = a \\
\iff \quad & b = 0 \quad \text{et} \quad a \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & z\overline{z'} = a \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

- Premier cas : $z' = 0$
- Deuxième cas : $z' \neq 0$

  Alors $z\overline{z'} = a$

  $\Rightarrow \quad z = \dfrac{a}{\overline{z'}} = \dfrac{a.z'}{\overline{z'}.z'} = \dfrac{a}{|z'|^2}z' = \alpha.z'$ avec $\alpha = \dfrac{a}{|z'|^2} \geq 0$

(Remarque : on a raisonné par **implication**. Il faut donc vérifier la **réciproque** :

- Premier cas : $z' = 0$.
  alors trivialement $|z+z'| = |z| = |z| + |z'|$

- Deuxième cas : $z = \alpha.z'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$

  Alors

  $$|z+z'| = |\alpha z' + z'| = |(\alpha+1)z'| = (\alpha+1)|z'| \quad \text{car } 1+\alpha \geq 0$$
  $$= \alpha|z'| + |z'| = |\alpha.z'| + |z'| \quad \text{car} \quad \alpha \geq 0$$
  $$= |z| + |z'|$$

Dans les deux cas cela marche.

3) Il reste à montrer l'inégalité de gauche : $\big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z+z'|$

$|z| - |z'|$ et $|z+z'|$ sont deux réels

Or, pour $A \in \mathbb{R}$ et $B \geq 0$

$$|A| \leq B$$
$$\iff \quad \max(A, -A) \leq B$$
$$\iff \quad A \leq B \quad \text{et} \quad -A \leq B$$

Donc

$$\big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z+z'|$$
$$\iff \quad |z| - |z'| \leq |z+z'| \quad \text{et} \quad |z'| - |z| \leq |z+z'|$$
$$\iff \quad |z| \leq |z+z'| + |z'| \quad \text{et} \quad |z'| \leq |z+z'| + |z|$$

Or

$$|z| = |(z+z') + (-z')| \leq |z+z'| + |-z'| \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$
$$\Rightarrow \quad |z| \leq |z+z'| + |z'| \quad \text{car} \quad |-z'| = |z'|$$

Cette inégalité est vraie pour tous $z, z' \in C$

On peut donc échanger z et z' :

$$|z'| \leq |z+z'| + |z|$$

On a bien obtenu les deux inégalités voulues. CQFD

4 Nombre complexes de module 1

Définition 5 : ensemble des complexe de module 1

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

Propriété 11 :Angle

A tout point du cercle $\mathbb{U}$ correspond un angle θ, défini modulo 2π, tel que $M(\cos(\theta),\ \sin(\theta))$

Propriété 12 : Argument

Tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit $z = \cos(\theta) + \mathbf{i}.\sin(\theta)$

où θ est appelé **un argument** de z et est noté $\arg(z)$

Définition 6 notation exponentielle

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}.\sin(\theta)$

Propriété 13 opérations

- $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.0} = 1 \qquad \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi} = -1 \qquad \mathrm{e}^{\mathbf{i}.\pi/2} = \mathbf{i}$
- $\overline{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} \qquad \left|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right| = 1$
- $\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2} \qquad \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}}$

  $\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta_1-\theta_2)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2}} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta} = [\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n$

Démonstration Les premières propriétés sont triviales

- Montrons que $\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}.\mathrm{e}^{\mathbf{i}y} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(x+y)}$ **(1)**

  $$\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}.\mathrm{e}^{\mathbf{i}y} = (\cos x + \mathbf{i}\sin x)(\cos y + \mathbf{i}\sin y) \quad \text{par définition}$$
  $$= \cos x \cos y + \mathbf{i}\sin x\cos y) + \mathbf{i}\cos x \sin y + \mathbf{i}^2 \sin x \sin y$$
  $$= (\cos x\cos y - \sin x \sin y) + \mathbf{i}(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$$
  $$= \cos(x+y) + \mathbf{i}\sin(x+y) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(x+y)} \quad \text{par définition}$$

- D'après cette propriété on a :

  $$\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}.\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta)} = \mathrm{e}^{i.0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}} \qquad \mathbf{(2)}$$

- $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta_2}$ d'après **(2)**

  $= \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta_1-\theta_2)}$ d'après **(1)**

- Mq $\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta} = [\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n$

  On commence par le démontrer par récurrence sur sur $n \in \mathbb{N}$

§ Initialisation : pour $n=0$, $\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}=\mathrm{e}^{\mathbf{i}0}=1$ et $[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n=[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^0=1$ Vrai pour $n=0$

§ Hérédité : supposons la relation vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$ donné

On a : $\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}=[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n$ (H.R.)

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}&=\mathrm{e}^{\mathbf{i}(n\theta+\theta)}=\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \quad \text{d'après } \mathbf{(1)}\\&=[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \quad \text{d'après } \mathbf{H.R}\\&=[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^{n+1} \text{ La relation est vraie au rang } n+1\end{aligned}$$

§ Conclusion $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}=[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n$ **(3)**

Il reste à la démontrer pour $n<0$:
Soit $n\in\mathbb{Z}^-$. On a $n=-p$ avec $p\in\mathbb{N}$. Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}&=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}p\theta}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}p\theta}} \quad \text{d'après } \mathbf{(2)}\\&=\frac{1}{[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^p} \quad \text{d'après } \mathbf{(3)} \quad \text{car } p\in\mathbb{N}\\&=[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^{-p}=[\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}]^n\end{aligned}$$

Conclusion : La relation est vraie pour tout $n\in\mathbb{Z}$ CQFD

4.1 Formules d'Euler

Propriété 14

$$\cos(x)=\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}, \qquad \sin(x)=\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}$$

ou encore

Propriété 15

$$\cos(x)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}) \qquad \sin(x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})$$

Démonstration En effet, $\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}=\cos x+\mathbf{i}\sin x$

$\Rightarrow \quad \cos x=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\overline{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}$

Et $\sin x=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\overline{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}}}{2\mathbf{i}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}$ CQFD

Applications :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ $\quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}a}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}$ $\quad 1-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a}$ etc.
- Linéarisation : $\cos^3 x.\sin x$

Solutions

- $\boxed{\mathrm{e}^{\mathbf{i}a}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}}$

  On met en facteur « l'angle moitié ». Ici c'est $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}$

  Méthode bourrin (mais efficace) :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathbf{i}a}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}&=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}a}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}}\\&=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}a}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}}+\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}}\right)\\&=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}a-\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}b-\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}\right)\\&=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a-b}{2}}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{-a+b}{2}}\right)\\&=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{a+b}{2}}.2\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

  Remarque : la factorisation peut se faire « à la volée » en sautant les trois premières étapes.

- $\boxed{1-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a}}$

  On met en facteur l'angle moitié, ici $-a/2$

  $1-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a}=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a/2}\left(\mathrm{e}^{+\mathbf{i}a/2}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a/2}\right)=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}a/2}.2\mathbf{i}.\sin(a/2)$

- $\boxed{C_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)}$

  On associe la somme des sinus : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$

  $C_n=\mathrm{Re}(\sigma_n)$ avec

$$\sigma_n=C_n+\mathbf{i}S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+\mathbf{i}\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + \mathbf{i}\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathbf{i}.kx} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^k$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}$

§ <u>1^{er} cas :</u> $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x} = 1 \iff x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Alors $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$

$\Rightarrow \quad C_n = \mathrm{Re}(\sigma_n) = n+1$

§ <u>$2^{\text{ème}}$ cas :</u> $\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x} \neq 1 \iff x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Alors

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^k = \frac{1-(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x})^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}} = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.(n+1)x/2} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}.x/2} - \mathrm{e}^{\mathbf{i}.x/2}}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2} \cdot \frac{-2\mathbf{i}.\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2\mathbf{i}.\sin\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2} \cdot \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

D'où

$$C_n = \mathrm{Re}(\sigma_n) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}.nx/2}) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \cos\frac{n.x}{2}$$

Remarque : Cette méthode donne aussi, sans autre calcul, la valeur de S_n :

Si $x = 0 \quad [2\pi] \quad S_n = 0$

Si $x \neq 0 \quad [2\pi] \quad S_n = \dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \sin\frac{n.x}{2}$

- Linéarisation : $\cos^3 x.\sin x$

$\cos^3 x.\sin x$

$$= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right)^3 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right)$$

$$= \frac{1}{16\mathbf{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)^3 \left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)$$

$$= \frac{1}{16\mathbf{i}} \left((\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})^3 + 3(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})^2(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}) + 3(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})^2 + (\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x})^3\right) \left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)$$

(binôme de Newton)

$$= \frac{1}{16\mathbf{i}} \left(\mathrm{e}^{3\mathbf{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathbf{i}x}\right) \left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)$$

$$= \frac{1}{16\mathbf{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4\mathbf{i}x} & +3\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x} & +3\mathrm{e}^{0x} & +\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x} & \\ & -\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x} & -3\mathrm{e}^{0x} & -3\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x} & -\mathrm{e}^{-4\mathbf{i}x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16\mathbf{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4\mathbf{i}x} & +2\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x} & & -2\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x} & -\mathrm{e}^{-4\mathbf{i}x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16\mathbf{i}} \Big((\mathrm{e}^{4\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-4\mathbf{i}x}) + 2(\mathrm{e}^{2\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}x})\Big)$$

$$= \frac{1}{16\mathbf{i}} \Big(2.\mathbf{i}\sin 4x + 4\mathbf{i}.\sin 2x\Big)$$

$$= \frac{1}{8}(\sin 4x + 2\sin 2x)$$

Vérifications :

- Pour $x = \pi/4$,

  $\cos^3(x) \ \sin(x) = (\sqrt{2}/2)^3(\sqrt{2}/2) = 1/4$

  $(\sin 4x + 2\sin 2x)/8 = (\sin\pi + 2\sin\pi/2)/8 = 2/8$

- Pour $x = \pi/3$

  $\cos^3(x) \ \sin(x) = (1/2)^3(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/16$

  $(\sin 4x + 2\sin 2x)/8 = (\sin 4\pi/3 + 2\sin 2\pi/3)/8$
  $= (-\sqrt{3}/2 + 2\sqrt{3}/2)/8 = (\sqrt{3}/2)/8$

Ça a l'air de tenir la route

4.2 Formule de Moivre

Propriété 16

$$(\cos\theta + \mathbf{i}.\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}.\sin(n\theta)$$

Application : Calcul de $\cos(3x),\ \sin(3x)$ en fonction $\sin x,\ \cos x$

Solution :

$$\begin{aligned}
&\cos(3x) + \mathbf{i}.\sin(3x) = \mathrm{e}^{3\mathbf{i}x} \\
&= (\cos x + \mathbf{i}\sin x)^3 \\
&= (\cos x)^3 + 3(\cos x)^2(\mathbf{i}\sin x) + 3(\cos x)(\mathbf{i}\sin x)^2 + (\mathbf{i}\sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + \mathbf{i}.3\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - \mathbf{i}.\sin^3 x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \cos(3x) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{3\mathbf{i}x}) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

et $\quad \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathbf{i}x}) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

5 Argument

Propriété 17

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. alors $\quad z/|z| \in \mathbb{U}$

En effet, $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$

Définition 7 : Argument

Soit $z \neq 0$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $\quad z = |z|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$

θ est appelé un argument de z et on note $\quad \theta = arg(z) \quad [2\pi]$

Attention : un argument est toujours défini modulo 2π

Propriété 18 : Valeurs particulières

a) $\arg(z) = 0 \quad [2\pi] \iff z$ réel positif

b) $\arg(z) = \pi \quad [2\pi] \iff z$ réel négatif

c) $\arg(z) = \pi \quad [\pi] \iff z$ réel (positif ou négatif)

d) z imaginaire pur $\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

Propriété 19 : opérations

- $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n.\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(a.z) = \begin{cases} \arg(z) \quad [2\pi] & \text{si} \quad a > 0 \\ \arg(z) + \pi \quad [2\pi] & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$

$\arg(-z) = ?$

Définition 8 : forme exponentielle

Tout complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme exponentielle :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \quad \text{où} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$$

Propriété 20 : Égalité par module et argument

Soient z_1, z_2 deux complexes non nuls

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) \quad [2\pi] \end{cases}$$

6 Exponentielle complexe

Définition 10 : Exponentielle complexe

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \mathrm{e}^{a+\mathbf{i}.b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a\big(\cos(b) + \mathbf{i}.\sin(b)\big)$

ou encore : Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathbf{i}.\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\big(\cos(\mathrm{Im}(z)) + \mathbf{i}.\sin(\mathrm{Im}(z))\big)$$

Remarque : pour en arriver là, on a procédé par étapes successives :

- La fonction exponentielle est déjà connue sur $\mathbb{R}$
- Sur $\mathbf{i}.\mathbb{R}$, on a défini $\quad \mathrm{e}^{i\theta}$
- Enfin, on définit maintenant l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier

Propriété 22 : Opérations

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z} \qquad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}} \qquad e^{n.z} = (e^z)^n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \qquad \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z) \quad [2\pi]$$

Démonstration Par exemple : pour $z = a + \mathbf{i}.b$ avec $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\overline{e^z} = \overline{e^{a+\mathbf{i}.b}} = \overline{e^a.e^{\mathbf{i}.b}} = \overline{e^a}.\overline{e^{\mathbf{i}.b}} = e^a.e^{-\mathbf{i}.b} = e^{a-\mathbf{i}.b} = e^{\overline{z}}$$

Propriété 23 : Égalité

$$\begin{aligned} & e^z = e^{z'} \\ \iff & z' - z = \mathbf{i}.2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff & \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \quad [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & e^z = e^{z'} \\ \iff & |e^z| = |e^{z'}| \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = \arg(e^{z'}) + 2k\pi \\ \iff & e^{\mathrm{Re}(z')} = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z') = \mathrm{Im}(z) + 2k\pi \\ \iff & \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \quad [2\pi] \end{cases} \\ \iff & z' = z + \mathbf{i}.2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Propriété 24 : Équation $e^z = a,\ a \in \mathbb{C}$

L'équation $e^z = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

- Si $a = 0$, n'admet pas de solution
- Si $a \neq 0$, admet une infinité de solutions de la forme

$$z = \ln(|a|) + \mathbf{i}(\arg(a) + 2k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Démonstration

- $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z')} > 0$ Donc $e^z = 0$ est impossible
- Pour $a \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} & e^z = a \\ \iff & |e^z| = |a| \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = \arg(a) + 2k\pi \\ \iff & e^{\mathrm{Re}(z)} = |a| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \arg(a) + 2k\pi \\ \iff & \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \ln|a| \\ \mathrm{Im}(z) = \arg(a) \quad [2\pi] \end{cases} \\ \iff & z = \ln(|a|) + \mathbf{i}(\arg(a) + 2k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

7 Second degré

7.1 Équation du second degré

Propriété 25 : Solutions des équations du second degré

Soit l'équation $Q(z) = az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
avec $a \in \mathbb{C}^*,\ (b,\ c) \in \mathbb{C}^2$

On note $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ le discriminant de cette équation

- Si $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
  et $Q(z) = a(z - z_0)^2$
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes
  $$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$
  Et $Q(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

Démonstration
On met le polynôme sous forme canonique :

$$\begin{aligned} Q(z) &= az^2 + bz + c \\ &= a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] \end{aligned}$$

On veut faire apparaitre le début d'un carré : $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

$$\begin{aligned} Q(z) &= a\left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] \quad \text{avec} \quad \delta^2 = \Delta = b^2-4ac\\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]\\
&= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\\
&= a\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\\
&= a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)
\end{aligned}$$

avec $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ qui sont les deux racines de Q

Dans le cas où $\Delta = 0$,

les deux racines sont égales à $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $Q(z) = a(z-z_0)^2$ CQFD

Propriété 26 : Produit et somme des racines

> Si z_1 et z_2 sont les racines du polynômes $Q(z) = az^2+bz+c = 0$ (avec $z_1 = z_2$ dans le cas de la racine double),
>
> alors $P = z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$, $S = z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$

Démonstration

On revient à la forme factorisée :

$$\begin{aligned}
Q(z) &= a(z-z_1)(z-z_2) = a(z^2 - z_1 z - z_2 z + z_1 z_2)\\
&= az^2 - a(z_1+z_2)z + az_1 z_2
\end{aligned}$$

Par identification avec $Q(z) = az^2+bz+c$

On a $-a(z_1+z_2) = b$ et $az_1z_2 = c$ Ce qui donne les formules voulues.

Propriété 27 : Solutions des sommes et produits

> Les solutions du système $\begin{cases} z_1 z_2 = P \\ z_1 + z_2 = S \end{cases}$ sont les couples $(z_1,\ z_2)$ solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$

Démonstration

$(z_1,\ z_2)$ sont les solutions de l'équation $(z-z_1)(z-z_2) = 0$

avec $(z-z_1)(z-z_2) = z^2 - (z_1+z_2).z + z_1.z_2 = z^2 - s.z + p$

Donc $(z_1,\ z_2)$ sont les solutions de l'équation $z^2 - s.z + p = 0$

7.2 Racines carrées d'un complexe

Soit $z = a + \mathbf{i}.b$ On cherche $\delta = x + \mathbf{i}.y$ tel que $\delta^2 = z$

$\iff a + \mathbf{i}.b = (x^2-y^2) + \mathbf{i}.2xy$

$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$

De plus : $|z| = |\delta|^2 \iff x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (3)

En faisant $(1)+(3)$ on obtient x^2 et donc les deux valeurs opposées de x. Pour chacune de ces deux solutions , on obtient y en utilisant l'équation (2). Cela donne les solutions δ_1 et $\delta_2 = -\delta_1$

Exemples : Trouver les racines carrées de $2+\mathbf{i}$ puis de $1-3\mathbf{i}$

Cherchons $\delta = x + \mathbf{i}.y$ tel que $\delta^2 = 2 + \mathbf{i}$

$\iff (x+\mathbf{i}.y)^2 = 2+\mathbf{i} \iff x^2 - y^2 + \mathbf{i}.2xy = 2 + \mathbf{i}$

$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases}$

D'autre part $(x+\mathbf{i}.y)^2 = 2+\mathbf{i} \Rightarrow |x+\mathbf{i}.y|^2 = |2+\mathbf{i}|$

$\iff x^2 + y^2 = \sqrt{5}$ (3)

$(1)+(3) \Rightarrow 2x^2 = 2+\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow x = \dfrac{+\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2}$ ou $x = \dfrac{-\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2}$

(3)-(1) $\Rightarrow \quad 2y^2 = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{2\sqrt{5}-4}{4}$

$\Rightarrow y = \dfrac{+\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}$ ou $y = \dfrac{-\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}$

Enfin, (2) $\Rightarrow \quad 2xy = 1 \quad \Rightarrow \quad xy > 0$

Donc les seules solutions possibles sont :

$$\delta_1 = \frac{+\sqrt{4+2\sqrt{5}}}{2} + \mathbf{i}\frac{+\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2} \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\delta_1$$

8 Racines n$^{\text{èmes}}$

Définition 11 : Racines $n^{\text{ièmes}}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de Z si et seulement si $\quad z^n = Z$

z est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité si et seulement si $\quad z^n = 1$

On notera $\quad \mathbb{U}_n \quad$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Propriété 28 : Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

L'équation $\quad z^n = 1 \quad$ admet n solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ qui sont de la forme

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \quad (\text{ou } k \in \{1, \ldots, n\})$$

On a donc $\quad \mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} / k \in [[0, n-1]]\right\}$

<u>Démonstration</u>

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} |z^n| = |1| \\ \arg(z^n) = \arg(1) \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'une part,

$$|z^n| = |1| \iff |z|^n = 1 \iff |z| = 1 \quad \text{car on est dans } \mathbb{R}^+$$

D'autre part

$$\arg(z^n) = \arg(1) \quad [2\pi]$$

$\iff \quad n\arg(z) = 0 + 2k\pi$

$\iff \quad \arg z = \dfrac{2k\pi}{n} \quad$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc

$$z^n = 1$$

$\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg z = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$

$\iff \quad z = z_k \quad$ avec $\quad z_k = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}, \; k \in \mathbb{Z}$

Enfin, pour $k = n$, on retrouve $\quad z_n = z_0$

Il suffit donc de prendre les valeurs de k dans$[[0; n-1]]$, ce qui donne bien n racines distinctes.

Propriété 29

Les racines de l'unité s'écrivent aussi

$$z_k = (\omega)^k \quad \text{avec} \quad \omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{n}} = z_1$$

Propriété 30 : Racine n$^{\text{ièmes}}$ de z

Soit $\quad Z = R\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \neq 0 \quad$ (avec $R > 0$)

Alors l'équation $\quad z^n = Z \quad$ admet n solutions distinctes qui s'écrivent

$$\begin{aligned} z_k &= R^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ &= R^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta/n}\omega^k \quad \text{avec} \quad \omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi/n} \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> $\quad z^n = R\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = Z$

$\iff \begin{cases} |z^n| = |Z| \\ \arg(z^n) = \arg(Z) \quad [2\pi] \end{cases}$

D'une part,

$|z^n| = |Z| \iff |z|^n = R \iff |z| = \sqrt[n]{R} = R^{1/n}$ car on est dans $\mathbb{R}^+$

D'autre part

$$\arg(z^n) = \arg(Z) \quad [2\pi]$$

$\iff \quad n\arg(z) = \theta + 2k\pi$

$\iff \quad \arg z = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc

$$\begin{aligned} & z^n = 1 \\ \iff & \begin{cases} |z| = R^{1/n} \\ \arg z = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \\ \iff & z = z_k \quad \text{avec} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_k &= R^{1/n} e^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \ k \in \mathbb{Z} \\ &= R^{1/n} e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{n}} e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} \\ &= R^{1/n}\, e^{\mathbf{i}\theta/n}\, \omega^k \quad \text{avec} \quad \omega = e^{\mathbf{i}2\pi/n} \end{aligned}$$

9 Géométrie

9.1 Interprétations géométriques

- $z(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$
- $|z_M| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$
- $|z_B - z_A| = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
- $\arg(z_u) = (\vec{i},\ \vec{u}) \quad [2\pi]$
- $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i},\ \vec{v}) - (\vec{i},\ \vec{u}) = \arg(z_v) - \arg(z_u) = \arg \dfrac{z_v}{z_u} \quad [2\pi]$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \left(\dfrac{z(\overrightarrow{AC})}{z(\overrightarrow{AB})} \right) = \arg \left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \quad [2\pi]$

9.2 propriétés géométriques (non exhaustives)

- Cercle de centre $A(z_A)$ et rayon $r > 0$:

$$\begin{aligned} & M(z) \in C(A, r) \iff AM = r \\ \iff & |z - z_A| = r \iff (z - z_A)(\overline{z} - \overline{z_A}) = r^2 \end{aligned}$$

- Colinéarité : Pour $u \neq 0,\ v \neq 0$

$$\begin{aligned} & u, v \text{ colinéaires} \\ \iff & u = kv \text{ avec } k \in \mathbb{R}^* \\ \iff & \frac{z_v}{z_u} \in \mathbb{R}^* \iff \overline{\left(\frac{z_v}{z_u}\right)} = \frac{z_v}{z_u} \iff \arg \frac{z_v}{z_u} = 0 \quad [\pi] \end{aligned}$$

- Alignement : Pour $A,\ B,\ C$ distincts,

$$\begin{aligned} & A,\ B,\ C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \\ \iff & \frac{z(\overrightarrow{AB})}{z(\overrightarrow{AC})} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\overline{z_B} - \overline{z_A}}{\overline{z_C} - \overline{z_A}} \end{aligned}$$

- perpendicularité :

$$\begin{aligned} & \vec{u} \perp \vec{v} \iff (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \arg \frac{z_v}{z_u} = \pi/2 \quad [\pi] \\ \iff & \frac{z_v}{z_u} \in \mathbf{i}.\mathbb{R} \iff \overline{\left(\frac{z_v}{z_u}\right)} + \frac{z_v}{z_u} = 0 \end{aligned}$$