

Professeur : SERVAIN
 Classe : PCSI
 Durée minimale : 2 h 30
 (Pas de calculatrice)

Discipline : Maths
 Durée de l'épreuve : 3 h 00
 Matériel autorisé : Rien

Attention :

- Marge droite de 2 cm
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de première feuille : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Sanction : -10 %

On commencera chacun des 6 exercices sur des pages différentes)

Exercice 1

Pour tout complexe $z \neq -\mathbf{i}$, on pose $f(z) = \frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}$

- a) Calculer $|f(z)|^2$ en fonction de z et \bar{z}
 b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbf{i}\}$

$$|f(z)| < 1 \iff \operatorname{Im}(z) > 0$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1/3\} \rightarrow E$, $x \mapsto \frac{3x + 7}{3x + 1}$

Déterminer, suivant les valeurs de $y \in \mathbb{R}$, si y admet un ou des antécédents dans $\mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

En déduire l'ensemble E pour lequel f est bijective et donner alors sa bijection réciproque f^{-1} (Ensemble de départ, ensemble d'arrivée et $f^{-1}(x)$)

Exercice 3

Dans \mathbb{R} , on pose $f(x) = \sqrt{3 - x}$ et $g(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$

Déterminer les domaines de définition de f , g , $f \circ g$, $f \circ f$ et calculer ces fonctions.

Exercice 4 Complexes

- 1) Calculer sous forme algébrique le nombre complexe : $A = (2 - 3\mathbf{i})^5$
- 2) Mettre sous forme exponentielle $B = (\sqrt{3} - \mathbf{i})^7$
 En déduire l'écriture algébrique de B
- 3) Linéariser l'expression suivante :

$$C = \sin^3(2x) \cos(x) \quad (\text{Méthode standard})$$

Exercice 5 *On commencera chacune des 3 questions sur des pages différentes)*

- 1) a) Calculer $D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 2^{2n-k}$ pour $n \geq 0$
 b) Vérifier la formule obtenue pour $n = 2$
- 2) Soient A, B, C 3 ensembles inclus dans un ensemble Ω . Montrer que

$$[(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)] \iff [C \subset A]$$

- 3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$

(On donnera le résultat sous la forme factorisée la plus simple possible et n'utilisant que des fonctions réelles)

Exercice 6

On commencera chacune des 5 questions sur des pages différentes)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- 1) Dans \mathbb{R} : $\sqrt{2x + 1} + x - 8 > 0$
- 2) Dans \mathbb{R} : $\cos 3x = \sin x$
- 3) Soit l'équation $2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2}$ (E)
 Déterminer les couples $(\cos x, \sin x)$ solutions de (E)