

Définition 1 : Racines $n^{\text{ièmes}}$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$ z est une racine $n^{\text{ème}}$ de Z si et seulement si $z^n = Z$ z est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité si et seulement si $z^n = 1$ On notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité**Exercice 1** (Racines de l'unité)1) Soit z une racine $3^{\text{ème}}$ de l'unité.

- Déterminer $|z|$
- Déterminer les différents arguments possibles de z
Combien y-a-t-il de valeurs distinctes de z ?
- Écrire ces différentes solutions sous forme exponentielle

2) Soit z une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

- Déterminer les différents arguments possibles de z
Combien y-a-t-il de valeurs distinctes de z ?
- Écrire ces différentes solutions sous forme exponentielle
- Montrer qu'on peut écrire ces solutions z_k sous la forme $z_k = \omega^k$
en déterminant ω sous forme exponentielle.

3) **Application** : Déterminez les formes exponentielles et les formes algébriques de racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$
Dans chaque cas, représenter ces racines dans le plan

Exercice 2 (Racines $n^{\text{èmes}}$)1) Soit $Z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$.

- Déterminer les racines $n^{\text{ème}}$ de Z sous la forme $z = \rho e^{i\alpha}$
Combien de racines distinctes?
- Écrire ces différentes racines en utilisant les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

2) **Applications**

- Calculer les racines $4^{\text{ièmes}}$ de $-72 + 72\sqrt{3}i$.
- Calculer les racines cubiques de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et les mettre sous forme algébrique.

Exercice 3 (Racines de l'unité)Calculer $S_n = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z$ et $P_n = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} z$ la somme et le produit des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité**Exercice 4**

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -1 + 2i\sqrt{6}$.
- $z_2 = -15 + 8i$.

Exercice 5Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$ **Exercice 6** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.
- $z^2 + (3 + 3i)z - 12 + i = 0$.
- $(z + 1)^6 + 27(z - 1)^6 = 0$
- $(z + i)^n = (z - i)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 7

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$a = -3 \quad b = -2e^{i\pi/5} \quad c = e^{2i\pi/5} + e^{-i\pi/5} \quad d = 1 - e^{i\pi/4} \quad f = 1 + e^{7i\pi/6}$$

Exercice 8

- Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leq 2$ et $|z_2 - a| \leq 3$ où $a = -2 + i$. Faire un dessin représentant la situation. Montrer que $|z_1 - z_2| \leq 5$
- Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes qui vérifient $|z_1 - a| \leq 2$ et $|z_2 - b| \leq 3$ où $a = -2 + i$ $b = -2 + 2i$. Faire un dessin représentant la situation. Montrer que $|z_1 - z_2| \leq 6$

Exercice 9Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - 1| = |z - i|$:

- par un raisonnement purement géométrique ;
- par un raisonnement purement algébrique.
- Vérifier qu'on obtient bien le même résultat !