Musée des horreurs

Exercice 1

$$f(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}-\mathbf{i}\frac{2z}{z^2+1}$$
$$|f(z)|^2=\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^2+\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)^2$$

On peut subodorer que la formule utilisée est

$$z=a+\mathbf{i}b \quad\Rightarrow\quad |z|^2=a^2+b^2$$

Seul problème : cette formule n'est vraie que si a,b sont des réels.

Or ici, par exemple $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ n'a AUCUNE raison d'être réel puisque z est un nombre complexe.
Utiliser des formules mécaniquement sans connaitre leurs conditions d'utilisation est toujours très gênant...

IMPORTANT

$$\frac{z\bar{z}+\mathbf{i}.z-\mathbf{i}\bar{z}+1}{z\bar{z}-\mathbf{i}z+\mathbf{i}\bar{z}+1}<1$$
$$\iff \quad z\bar{z}+\mathbf{i}.z-\mathbf{i}\bar{z}+1<z\bar{z}-\mathbf{i}z+\mathbf{i}\bar{z}+1 \quad \text{car tout est positif}$$

Quelle opération a-t-on faite ? (Bonne question à se poser constamment !)

On a multiplié les deux membres de l'inégalité par $z\bar{z}-\mathbf{i}z+\mathbf{i}\bar{z}+1$

La seule condition nécessaire pour que cette opération soit valide est donc

« car $z\bar{z}-\mathbf{i}z+\mathbf{i}\bar{z}+1$ est positif »

Et non pas la formule fourre-tout (qui est parfois bien utile quand même) « car tout est positif »

$$0<-2\mathbf{i}(z-\bar{z})$$
$$\iff \quad 0<z-\bar{z}$$

Ici, on a divisé par $-2\mathbf{i}$ Il faut donc avoir $-2\mathbf{i}>0$

Seul petit problème : $-2\mathbf{i}$ N'EST PAS RÉEL.

Donc $-2\mathbf{i}>0$ n'a AUCUN SENS

D'ailleurs l'expression suivante

$$0<z-\bar{z}$$

n' a également aucun sens puisque $z-\bar{z}=2\mathbf{i}.\mathrm{Im}(z)$ donc appartient pas non plus à $\mathbb{R}$.

$$|f(z)|^2=f(z)\ f(\bar{z})$$

$$|f(z)|^2=f(z)\ \overline{f(z)}$$

Mais il n'y a aucune raison d'avoir $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$

Une imagination sans limite :

$$|z-\mathbf{i}|^2=z\bar{z}+1$$

Alors là, pour le coup, je ne sais pas de quoi cela peut venir...

De l'usage du trait :

Sachant que $\bar{z}=-z$

Bah évidemment ! Un trait c'est un trait. Donc sachant que le trait peut désigner une soustraction, une division ou un conjugué, tout cela revient finalement au même... Selon le même principe :

$$\left(\frac{|z-\mathbf{i}|}{|z+\mathbf{i}|}\right)^2=|z-\mathbf{i}|^2-|z+\mathbf{i}|^2$$

Car on sait que la division et la soustraction, c'est la même chose. C'est une propriété bien connue et universellement admise.

Or $(z-\bar{z})=(\bar{z}-z)$

Cette formule est plutôt étrange. Mais en mettant des parenthèses, cela fait tout de suite plus sérieuse.
Évidemment cela ne serait vrai que si et seulement si z était réel.

Exercice 2
Du bon démarrage :

y admet un ou des antécédents dans $\mathbb{R}$ sssi $f(x)=y$

Logiquement cette phrase ne tient pas.

- D'une part « y admet un ou des antécédents dans $\mathbb{R}$ »

Cette proposition dépend de y mais pas de x (qui n'apparaît nulle part.)

- D'autre part $f(x) = y$

  Cette proposition dépend de y et de x

Donc ces deux propositions ne peuvent être logiquement équivalentes.

- $y = f(x)$ se traduit par "x est un antécédent de y
- Par contre, y admet un ou des antécédents dans $\mathbb{R}$

  se traduit logiquement par

  Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$

  Proposition qui ne dépend pas de x puisque x est quantifié par « il existe ». Et donc cela reste cohérent.

IMPORTANT

Il faut donc nettement séparer les deux problèmes :

- Cherchons les antécédent de y
- x est un antécédent de y

$\iff$ $y = f(x)$

$\iff$ ...

$$3(y-1)x = -y+7 \iff \frac{-y+7}{3(y-1)}$$

Dans le meilleur des cas, on a discuté deux cas APRÈS le calcul. (Dans le pire, on n'a discuté du tout.)

Or on ne discute pas après mais AVANT de faire une manœuvre discutable.

Ainsi, en maths, on évite d'écrire des choses qui n'existe pas. On regarde d'abord si cela va exister et ensuite on fait le calcul. On essaie toujours de réfléchir avant de passer à l'acte. Cela peut éviter bien des problèmes dans la vie.Ainsi quand vous voulez jeter quelque chose dans la pièce, il peut être intéressant de se demander si c'est un ballon ou une grenade dégoupillée AVANT de le lancer...

Exercice 3

$f(x) = \sqrt{3-x}$
f existe ssi $3 - x \geq 0$

La fonction existe, là n'est pas la question.

Mais on veut savoir pour quelles valeurs de x elle est définie, c'est-à-dire pour quelles valeurs de x, $f(x)$ existe. Il faut donc distinguer

- La fonction f (qui a priori existe puisqu'on vous la donne)
- Son domaine de définition. C'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

On a donc l'équivalence suivante

$s \in D_f \iff f(x)$ existe

IMPORTANT

Je l'ai déjà dit, écrit, crié, vociféré, soupiré, murmuré, hurlé, chanté ou aboyé :

On ne doit pas confondre la fonction f et la valeur prise par la fonction en x qui est notée $f(x)$

C'est comme confondre le micro-onde et la pizza réchauffée. En général, on évite de manger le micro-onde. C'est pareil en maths.(Même si les conséquences sont légèrement moins graves).
Il faut donc écrire

$f(x)$ existe ssi $3 - x \geq 0$

$f \circ f = f(f(x))$

Même problème ici.

- A ma gauche je vous présente une fonction dans toute sa splendeur : $f \circ f$
- A ma droite, dans cet exercice, un réel : $f(f(x))$

Et comme on ne mélange pas les torchons avec les serviettes, ni les bébés avec les brosses à dent, il ne peut pas y avoir d'égalité entre ces deux objets.

IMPORTANT

$\sqrt{3-x} \geq 0 \iff 3 - x \geq 0$

Il y a confusion entre deux choses totalement distinctes :

l'EXISTENCE et la POSITIVITÉ de $\sqrt{3-x}$

- $\sqrt{3-x}$ EXISTE ssi $x - 3 \geq 0$
- D'autre part, Quand elle existe, $\sqrt{3-x}$ est toujours positive.

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 3 \iff x + 1 \leq 3(x-2)$$

On multiplie par $(x-2)$ sans connaître le signe de $x-2$!

C'est donc une HORREUR absolument horrible.

Notation :

$D_{f\circ g} = \mathbb{R}\backslash[2, 7/2[$

Dans un ensemble résultat, on n'exclut que des valeurs isolées Par exemple $\mathbb{R}\backslash\{-1, 3\}$ mais pas des intervalles.

Ce n'est pas faut, mais il vaut mieux savoir ce qu'on a que ce qu'on n'a pas. (En plus, c'est meilleur pour le moral.)

$\sqrt{x}$ existe ssi $x > 0$

Évidemment puisque $\sqrt{0}$ n'existe pas mais vaut 0

(Attention : c'est une blague! Bien sûr $\sqrt{0}$ existe et vaut bien 0. Quelque chose qui n'existe pas ne pourrait pas valoir 0. Ouf!)

En tout cas, cette monstruosité sera de plus en plus sévèrement sanctionné. Qu'on se le dise dans les chaumières et dans les châteaux.

$D_f = [3, -\infty[$

Ça, c'est une bizarrerie. Dans les intervalles, on est prié de mettre les bornes dans le bon sens.

Exercice 4

IMPORTANT

$$C = \sin^3(2x)\ \cos(x) = \ldots$$
$$= \frac{1}{8\mathbf{i}}\left(-\sin(7x) - \sin(5x) + 3\sin(3x) + 3\sin x\right)$$

Par définition $C \in \mathbb{R}$

Or le résultat obtenu n'appartient pas à $\mathbb{R}$

Ce résultat est donc FAUX. (Logique non ?)

La moindre des choses est de le signaler sur votre copie (même, et surtout, si vous n'avez pas le temps de retrouver votre erreur). Cela peut vous valoir une certaine indulgence du correcteur : au moins ce candidat fait preuve d'un peu de bon sens d'esprit critique vis-à-vis de ses résultats. (C'est un peu comme en physique, quand on vérigfie que les formules ont les bonnes unités. - je ne sais plus comment cela s'pappele. Pour éviter d'avoir une langueur en Ampères ou une Force en degrés...)

Exercice 5

Calculer $D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k}$ pour $n \geq 0$

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \times \sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k}$$

Horreur absolue! C'est beau comme l'antique, mais cela ne marche pas.

$2^{2n-k} = 2^{2n} - 2^k$

C'est pas mal non plus

Écritures :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k}$$
$$\iff \quad D_n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k} - \binom{n+1}{n+1} 2^{2n-(n+1)}$$
$$\iff \quad D_n = \ldots,$$

Formellement, cela est exact, je vous le concède.

Par contre, cela veut dire que vous ne distinguez pas un simple calcul (ce qui est le cas ici) avec un raisonnement logique.

Donc quand vous faites un simple calcul présentez-le comme tel :

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k} - \binom{n+1}{n+1} 2^{2n-(n+1)}$$
$$= \ldots,$$

De plus, cela économise de l'encre.

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k} = \cdots = 2^{2n}(\frac{1}{2} + 1)^{n+1} - 2^{2n+2-k}$$

- D'abord on ne laisse pas l'expression $\frac{1}{2} + 1$ telle quelle dans un résultat.

On termine le calcul.

- Mais beaucoup plus GRAVE : par définition D_n ne dépend pas de k (car c'est l'indice de la somme). Donc le résultat est nécessairement faux. De nouveau, il faut le signaler au correcteur pour prouver qu'il vous reste encore un peu de lucidité.

Exercice 6
IMPORTANT

Supposons $A \cap (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C)$ est un ensemble. Ce n'est donc ni vrai ni faux. Ce n'est donc pas une proposition.

Donc écrire « Supposons $A \cap (B \cup C)$ » n'a donc AUCUN SENS.

Une chose essentielle en mathématique est d'identifier correctement les objets qu'on manipule :

Est-ce

- un nombre (réel ou complexe, ...)
- une fonction
- un ensemble
- une proposition
- Etc.

C'est une condition de survie incontournable dans la jungle mathématique. C'est comme savoir distinguer le coassement du tigre de l'aboiement de la grenouille.

$x \in [A \cap (B \cup C)] = x \in [(A \cap B) \cup C]$

Cette écriture n'a aucun sens.

Éventuellement, puisque $[A \cap (B \cup C)]$ est un ensemble, alors $x \in [A \cap (B \cup C)]$ est une proposition (cela peut être vrai ou faux). Donc on pourrait écrire que les deux propositions sont équivalentes :

$$\left(x \in [A \cap (B \cup C)] \right) \iff \left(x \in [(A \cap B) \cup C] \right)$$

De plus il faudrait le justifier :

$[A \cap (B \cup C)] = [(A \cap B) \cup C]$
Donc $\big(x \in [A \cap (B \cup C)]\big) \iff \big(x \in [(A \cap B) \cup C]\big)$

De toute façon, on doit apprendre à raisonner sur des choses élémentaires et simples, et pas sur des gloubiboulgas de ce style, plus ou moins complexes et sensés.

$(x \in A)$ et $\big(x \in B$ ou $x \in C\big)$

Je ne veux pas de gloubiboulgas de ce genre. On traite deux informations à la fois, et pas 3! L'enjeu est d'apprendre à bien séparer les différentes étapes du raisonnement.

Mais il y a pire !

$x \in A$ et $x \in B$ ou $x \in C$

Cela n'a pas de sens logique car on ne sait si on doit lire

$$x \in A \text{ et } \big(x \in B \text{ ou } x \in C\big)$$

ou bien

$$\big(x \in A \text{ et } x \in B\big) \text{ ou } x \in C$$

Or ces deux propositions ne sont absolument pas équivalentes.

C'est pour cela en particulier que je ne veux pas que vous bricoliez 3 proposions en même temps.

Exercice 7
IMPORTANT

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

NON car

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{19}{20}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{+\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} \quad \text{OU} \quad \sin\alpha = \frac{-\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$$

Ici on CHOISIT α dont le sinus est positif. On aurait pu prendre la deuxième valeur (en fait en choisisant $-\alpha$).

En tout cas l'implcation

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

est monstrueuse.