

**Exercice 1**

Pour tout complexe  $z \neq -i$ , on pose  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$

a) Calculer  $|f(z)|^2$  en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$

$$|f(z)|^2 = f(z) \overline{f(z)} = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z\bar{z}+i\bar{z}-i\bar{z}+1}{z\bar{z}-i\bar{z}+i\bar{z}+1}$$

b) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$

$$|f(z)| < 1 \iff \operatorname{Im}(z) > 0$$

$$|f(z)| < 1$$

$$\iff |f(z)|^2 < 1 \text{ car tout est positif}$$

$$\iff \frac{z\bar{z}+i\bar{z}-i\bar{z}+1}{z\bar{z}-i\bar{z}+i\bar{z}+1} < 1$$

$$\iff z\bar{z}+i\bar{z}-i\bar{z}+1 < z\bar{z}-i\bar{z}+i\bar{z}+1 \text{ car } z\bar{z}-i\bar{z}+i\bar{z}+1 = |z+i|^2 > 0$$

$$\iff 2i\bar{z} < 0$$

$$\iff 2i(z-\bar{z}) < 0$$

$$\iff 2i(2i\operatorname{Im}(z)) < 0$$

$$\iff -4\operatorname{Im}(z) < 0$$

$$\iff \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ CQFD}$$

**Exercice 2**

Soit  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1/3\} \rightarrow E$ ,  $x \mapsto \frac{3x+7}{3x+1}$

Déterminer, suivant les valeurs de  $y \in \mathbb{R}$ , si  $y$  admet un ou des antécédents dans  $\mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

Soit  $y \in \mathbb{R}$

$y$  a pour antécédent  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

$$\iff y = f(x)$$

$$\iff y = \frac{3x+7}{3x+1}$$

$$\iff y(3x+1) = 3x+7 \text{ car } 3x+1 \neq 0 \text{ pour } x \neq -1/3$$

$$\iff 3xy + y = 3x + 7$$

$$\iff 3xy - 3x = -y + 7$$

$$\iff 3(y-1)x = -y + 7$$

• 1<sup>er</sup> cas :  $y = 1$

Alors d'après l'égalité précédente  $< < < (\text{en remplaçant } y \text{ par } 1 : > > >$

$$y = f(x) \iff 0x = -1 + 7 \iff 0 = 6 \text{ Impossible}$$

Donc  $y = 1$  n'admet pas d'antécédent par  $f$  dans  $D_f$

• 2<sup>ème</sup> cas :  $y \neq 1$

$$\text{Alors } y = f(x) \iff x = \frac{-y+7}{3(y-1)}$$

Donc  $y \neq 1$  admet un unique antécédent  $x$

Vérifions que celui-ci appartient bien à  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

$$\text{Or } \frac{-y+7}{3(y-1)} = \frac{-1}{3} \iff 3(-y+7) = -1 \times 3(y-1) \text{ car } 3(y-1) \neq 0$$

$$\iff -3y + 21 = -3y + 3 \iff 21 = 3 \text{ Ce qui est impossible}$$

Donc  $x \neq -1/3$  d'où  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$  Ce qu'on désirait

En déduire l'ensemble  $E$  pour lequel  $f$  est bijective et donner alors sa bijection réciproque  $f^{-1}$  (Ensemble de départ, ensemble d'arrivée et  $f^{-1}(x)$ )

D'après ce qui précède,

tout élément  $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  admet un unique antécédent  $x = \frac{-y+7}{3(y-1)} \in \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

Donc, par définition,  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$  dans  $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

La réciproque  $f^{-1}$  est une bijection de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  dans  $\mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

$$\text{telle que, pour tout } y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f^{-1}(y) = \frac{-y+7}{3(y-1)}$$

Autrement dit :

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}, x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{-x+7}{3(x-1)}$$

**Exercice 3**

Dans  $\mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \sqrt{3-x}$  et  $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Déterminer les domaines de définition de  $f$ ,  $g$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$  et calculer ces fonctions.

$$\bullet D_f: f(x) \text{ existe} \iff 3-x \geq 0 \iff x \leq 3 \quad D_f = ]-\infty; 3]$$

$$\bullet D_g: f(x) \text{ existe} \iff x-2 \geq 0 \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\bullet D_{f \circ g}: (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ existe} \iff x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f$$

$$\S \quad x \in D_g \iff x \neq 2$$

$$\begin{aligned}
&\S \quad g(x) \in D_f \\
&\iff g(x) \leq 3 \\
&\iff \frac{x+1}{x-2} \leq 3 \\
&\iff \frac{x+1}{x-2} - 3 \leq 0 \\
&\iff \frac{(x+1) - 3(x-2)}{x-2} \leq 0 \\
&\iff \frac{-2x+7}{x-2} \leq 0
\end{aligned}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$     | $-\infty$ | $2$  | $7/2$ | $+\infty$ |     |
|---------|-----------|------|-------|-----------|-----|
| $-2x+7$ | $+$       | $ $  | $-$   | $0$       | $+$ |
| $x-2$   | $-$       | $0$  | $-$   | $ $       | $+$ |
| $Q(x)$  | $-$       | $  $ | $+$   | $0$       | $-$ |

Donc  $x \in ]-\infty; 2] \cup ]7/2; +\infty[$

$\S$  Conclusion :  $D_{f \circ g} = ]-\infty; 2] \cup ]7/2; +\infty[$

Pour  $x \in D_{f \circ g}$ ,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3 - g(x)} = \sqrt{3 - \frac{x+1}{x-2}} = \sqrt{\frac{2x-7}{x-2}} \quad \text{d'après le calcul précédent.}$$

$$\bullet D_{f \circ f} : (f \circ f)(x) = f(f(x)) \text{ existe} \iff x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_f$$

$$\S \quad x \in D_f \iff x \leq 3$$

$$\S \quad f(x) \in D_f$$

$$\iff f(x) \leq 3$$

$$\iff \sqrt{3-x} \leq 3$$

$$\iff 3-x \leq 9 \quad \text{car car tout est positif}$$

$$\iff -6 \leq x$$

$\S$  Conclusion : on a donc  $x \geq 3$  et  $x \geq -6$

$$D_{f \circ f} = [-6; 3]$$

$$\text{Pour } x \in [-6; 3], (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{3-x} = \sqrt{3-\sqrt{3-x}}$$

#### Exercice 4 Complexes

1) Calculer sous forme algébrique le nombre complexe :  $A = (2 - 3i)^5$

En utilisant le triangle de Pascal :

|   |   |    |    |   |   |  |
|---|---|----|----|---|---|--|
| 1 |   |    |    |   |   |  |
| 1 | 1 |    |    |   |   |  |
| 1 | 2 | 1  |    |   |   |  |
| 1 | 3 | 3  | 1  |   |   |  |
| 1 | 4 | 6  | 4  | 1 |   |  |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |  |

D'après le binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}
A &= (2 - 3i)^5 \\
&= 1.(2)^5.(-3i)^0 \\
&\quad + 5.(2)^4.(-3i)^1 \\
&\quad + 10.(2)^3.(-3i)^2 \\
&\quad + 10.(2)^2.(-3i)^3 \\
&\quad + 5.(2)^1.(-3i)^4 \\
&\quad + 1.(2)^0.(-3i)^5
\end{aligned}$$

Calcul des puissances :

$$(-3i)^1 = -3i$$

$$(-3i)^2 = -9$$

$$(-3i)^3 = -9 \times (-3i) = 27i$$

$$(-3i)^4 = 27i \times (-3i) = 81$$

$$(-3i)^5 = 81 \times (-3i) = -243i$$

On remplace :

$$\begin{aligned}
A &= 1.32.1 \\
&\quad + 5.16.(-3i) \\
&\quad + 10.8.(-9) \\
&\quad + 10.4.(27i) \\
&\quad + 5.2.(81) \\
&\quad + 1.1.(-243i) \\
&= (32 - 10.8.9 + 5.2.81) + i(-5.16.3 + 10.4.27 - 243) \\
&= (32 - 720 + 810) + i(-240 + 1080 - 243) \\
&= 122 + i.597
\end{aligned}$$

- 2) Mettre sous forme exponentielle  $B = (\sqrt{3} - \mathbf{i})^7$   
En déduire l'écriture algébrique de  $B$

$$z = \sqrt{3} - \mathbf{i} = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i} \frac{-1}{2} \right) = 2(\cos(-\pi/6) + \mathbf{i} \sin(-\pi/6)) = 2e^{-\mathbf{i}\pi/6}$$

D'où

$$\begin{aligned} B = z^7 &= (2e^{-\mathbf{i}\pi/6})^7 = 2^7 e^{-\mathbf{i}7\pi/6} = 2^7 e^{\mathbf{i}5\pi/6} \\ &= 2^7 (\cos(5\pi/6) + \mathbf{i} \sin(5\pi/6)) = 2^7 \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i} \frac{1}{2} \right) = -2^6 \sqrt{3} + \mathbf{i} 2^6 \end{aligned}$$

- 3) Linéariser l'expression suivante :  $C = \sin^3(2x) \cos(x)$  (Méthode standard)

$$\begin{aligned} C &= \sin^3(2x) \cos(x) \\ &= \left( \frac{e^{2\mathbf{i}x} - e^{-2\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}} \right)^3 \left( \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2} \right) \\ &= \left( \frac{(e^{2\mathbf{i}x})^3 + 3(e^{2\mathbf{i}x})^2(-e^{-2\mathbf{i}x}) + 3(e^{2\mathbf{i}x})(-e^{-2\mathbf{i}x})^2 + (-e^{-2\mathbf{i}x})^3}{2^3 \cdot \mathbf{i}^3} \right) \left( \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2} \right) \\ &= \left( \frac{e^{\mathbf{i}6x} - 3e^{\mathbf{i}2x} + 3e^{-\mathbf{i}2x} - e^{-\mathbf{i}6x}}{-8\mathbf{i}} \right) \left( \frac{e^{\mathbf{i}x} + e^{-\mathbf{i}x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{-16\mathbf{i}} \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}7x} & -3e^{\mathbf{i}3x} & +3e^{-\mathbf{i}x} & -e^{-\mathbf{i}5x} \\ & +e^{\mathbf{i}5x} & -3e^{\mathbf{i}x} & +3e^{-\mathbf{i}3x} & -e^{-\mathbf{i}7x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-16\mathbf{i}} \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}7x} & +e^{\mathbf{i}5x} & -3e^{\mathbf{i}3x} & -3e^{\mathbf{i}x} \\ & +3e^{-\mathbf{i}x} & +3e^{-\mathbf{i}3x} & -e^{-\mathbf{i}5x} & -e^{-\mathbf{i}7x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{16\mathbf{i}} \begin{pmatrix} (e^{\mathbf{i}7x} - e^{-\mathbf{i}7x}) + (e^{\mathbf{i}5x} - e^{-\mathbf{i}5x}) \\ -3(e^{\mathbf{i}3x} - e^{-\mathbf{i}3x}) - 3(e^{\mathbf{i}x} - e^{-\mathbf{i}x}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{16\mathbf{i}} (2\mathbf{i} \sin(7x) + 2\mathbf{i} \sin(5x) - 3 \cdot 2\mathbf{i} \sin(3x) - 3 \cdot 2\mathbf{i} \sin(x)) \\ &= \frac{1}{8} (-\sin(7x) - \sin(5x) + 3 \sin(3x) + 3 \sin(x)) \end{aligned}$$

Vérification : Par exemple, pour  $x = \pi/3$

$$\sin^3(2x) \cos(x) = \sin^3(2\pi/3) \cos(\pi/3) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8} (-\sin(7x) - \sin(5x) + 3 \sin(3x) + 3 \sin(x)) \\ &= \frac{1}{8} (-\sin(7\pi/3) - \sin(5\pi/3) + 3 \sin(3\pi/3) + 3 \sin(\pi/3)) \\ &= \frac{1}{8} (-\sin(\pi/3) - \sin(-\pi/3) + 3 \sin(\pi) + 3 \sin(\pi/3)) \\ &= \frac{1}{8} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 0 + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

Cela semble marcher

### Exercice 5

- 1) a) Calculer  $D_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 2^{2n-k}$  pour  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 2^{2n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{2n-k} - \binom{n+1}{n+1} 2^{2n-(n+1)} \\ &= 2^{2n} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{-k} - 2^{n-1} \\ &= 2^{2n} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (1/2)^k \cdot 1^{n+1-k} - 2^{n-1} \\ &= 2^{2n} \left( \frac{1}{2} + 1 \right)^{n+1} - 2^{n-1} = 2^{2n} \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} - 2^{n-1} \\ &= 2^{2n} \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} - 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 3^{n+1} - 2^{n-1} \end{aligned}$$

- b) Vérifier la formule obtenue pour  $n = 2$

Pour  $n = 2$

D'une part :

$$\begin{aligned} D_2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2+1}{k} 2^{4-k} = \binom{2+1}{0} 2^{4-0} + \binom{2+1}{1} 2^{4-1} + \binom{2+1}{2} 2^{4-2} \\ &= 1 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 16 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 16 + 24 + 12 = 52 \end{aligned}$$

D'autre part  $2^{n-1} \cdot 3^{n+1} - 2^{n-1} = 2^1 \cdot 3^3 - 2^1 = 2 \cdot 27 - 2 = 52$

Ça marche

2) Soient  $A, B, C$  3 ensembles inclus dans un ensemble  $\Omega$ . Montrer que

$$[(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)] \iff [C \subset A]$$

$\Rightarrow$  Montrons :  $[(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)] \Rightarrow [C \subset A]$

Supposons :  $[(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)]$   
(et montrons alors  $[C \subset A]$ )

Soit  $x \in C$ .

$$\Rightarrow x \in C \text{ ou } x \in (A \cap B)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$$

$$\text{Or } (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

$$\text{Donc } x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ et } x \in \cap(B \cup C)$$

$\Rightarrow x \in A$  a fortiori

On a donc bien  $C \subset A$

On a donc montré l'implication

$\Leftarrow$  Montrons :  $[C \subset A] \Rightarrow [(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)]$

Supposons  $[C \subset A]$

(Montrons  $[(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)]$  par double inclusion)

$\subset$  Montrons :  $[(A \cap B) \cup C \subset A \cap (B \cup C)]$

Soit  $x \in (A \cap B) \cup C$  (Montrons que  $x \in A \cap (B \cup C)$  )

$$\Rightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in C$$

§ 1<sup>er</sup> cas :  $x \in A \cap B$

$$\Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

$$x \in B \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in B \cup C$$

$$\text{Or } x \in A$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

§ 2<sup>ème</sup> cas :  $x \in C$

$$\Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in B \cup C$$

Or  $x \in C$  et  $C \subset A$  par hypothèse

Donc  $x \in A$

D'où  $x \in A$  et  $x \in B \cup C$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

§ dans tous les cas  $x \in A \cap (B \cup C)$

On a donc bien  $[(A \cap B) \cup C \subset A \cap (B \cup C)]$

$\supset$  Montrons :  $[A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup C]$

Soit  $x \in [A \cap (B \cup C)]$  Montrons que  $x \in (A \cap B) \cup C$  )

$$\Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C$$

$$x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \text{ ou } x \in C$$

Distinguons deux cas :  $x \in C$  ou  $x \in B$

§ 1<sup>er</sup> cas :  $x \in C$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ ou } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$$

§ 2<sup>ème</sup> cas :  $x \in B$

Or  $x \in A$  donc  $x \in A \cap B$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$$

§ Dans les deux cas :  $x \in (A \cap B) \cup C$

On a donc montré :  $[A \cap (B \cup C)] \subset [(A \cap B) \cup C]$

Ayant la double inclusion, on a bien :

$$\underline{[A \cap (B \cup C)] = [(A \cap B) \cup C]}$$

- 3) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$

(On donnera le résultat sous la forme factorisée la plus simple possible et n'utilisant que des fonctions réelles)

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(e^{i.kx}) = \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^n e^{i.kx} \right) = \operatorname{Im}(\sigma_n)$$

Avec  $\sigma_n = \sum_{k=0}^n e^{i.kx} = \sum_{k=0}^n (e^{i.x})^k$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison  $e^{i.x}$

Or  $x \neq 2\pi k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  Donc  $e^{i.x} \neq 1$

D'où

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=0}^n (e^{i.x})^k \\ &= \frac{1 - (e^{i.x})^{n+1}}{1 - e^{i.x}} \\ &= \frac{1 - e^{i.(n+1)x}}{1 - e^{i.x}} \\ &= \frac{e^{i.(n+1)x/2}}{e^{i.x/2}} \cdot \frac{e^{-i.(n+1)x/2} - e^{i.(n+1)x/2}}{e^{i.x/2} - e^{-i.x/2}} \\ &= e^{i.nx/2} \cdot \frac{-2i \cdot \sin((n+1)\frac{x}{2})}{-2i \cdot \sin \frac{x}{2}} \\ &= e^{i.nx/2} \cdot \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S_n &= \operatorname{Im}(\sigma_n) = \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im}(e^{i.nx/2}) \\ &= \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \sin(n\frac{x}{2}) \end{aligned}$$

### Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- 1) Dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{2x+1} + x - 8 > 0$

- L'équation est définie ssi  $\sqrt{2x+1}$  existe  $\iff 2x+1 \geq 0 \iff x \geq \frac{-1}{2}$

Donc  $D = [\frac{-1}{2}, +\infty[$

- $\sqrt{2x+1} + x - 8 > 0 \iff \sqrt{2x+1} > -x + 8$

Avec  $-x + 8 \geq 0 \iff x \leq 8$

- 1er cas :  $x \in ]8, +\infty[$

$-x + 8 < 0$  et  $\sqrt{2x+1} \geq 0$

Donc  $\sqrt{2x+1} > -x + 8$  est vraie

$S_1 = [8; +\infty[$

- 2ème cas :  $x \in [\frac{-1}{2}, 8]$  Alors  $-x + 8 \geq 0$

Tout est positif donc

(E)  $\iff \sqrt{2x+1} > -x + 8$

$\iff 2x+1 > (-x+8)^2$

$\iff 2x+1 > x^2 - 16x + 64$

$\iff 0 > x^2 - 18x + 63$

$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 63 = (9 \times 2)^2 - 4 \times 63 = 4(9^2 - 63) = 2^2 \times 18 = 2 \times 6^2$

$x_1 = \frac{18 - 6\sqrt{2}}{2} = 9 - 3\sqrt{2}, \quad x_2 = 9 + 3\sqrt{2}$

(Vérif :  $x_1 x_2 = 9^2 - 3^2 \cdot 2 = 81 - 18 = 63 = \ll \frac{c}{a} \gg$ )

Donc (E)  $\iff x \in ]x_1; x_2[$

Or on est dans le cas  $x < 8$

Voyons si les racines sont dans ce domaine

$\sqrt{2} > 1 \implies -6\sqrt{2} < -6 \implies x_1 = 9 - 6\sqrt{2} < 3$

D'autre part  $x_2 = 9 + 6\sqrt{2} > 8$

Donc  $S_2 = ]x_1; 8[$

- Conclusion :  $S = S_1 \cup S_2 = ]x_1; +\infty[ \cup ]9 - 3\sqrt{2}; +\infty[$

2) Dans  $\mathbb{R}$  :  $\cos 3x = \sin x$

$$\cos 3x = \sin x$$

$$\iff \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$$

$$\iff 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3) Soit l'équation  $2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2}$  (**E**)

Déterminer les couples  $(\cos x, \sin x)$  solutions de (**E**)

$$(E) \iff 2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\iff \begin{cases} 2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2X + Y = \frac{1}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{2} - 2X = \frac{1 - 4X}{2}$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

$$\iff X^2 + \left(\frac{1 - 4X}{2}\right)^2 = 1$$

$$\iff 4X^2 + (1 - 4X)^2 = 4$$

$$\iff 4X^2 + 1 - 8X + 16X^2 = 4$$

$$\iff 20X^2 - 8X - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2 \times 4)^2 - 4 \times 20 \times (-3) = 4 \times 4^2 + 4 \times 60 = 4 \times 76 = 4 \times 4 \times 19 = 4^2 \times 19$$

$$X_1 = \frac{8 + 4\sqrt{19}}{2 \times 20} = \frac{2 + \sqrt{19}}{10} \quad X_2 = \frac{2 - \sqrt{19}}{10}$$

$$\text{Vérif : } X_1 X_2 = \frac{(2 + \sqrt{19})(2 - \sqrt{19} - 1)}{10^2} = \frac{4 - 19}{25} = \frac{-15}{100} = \frac{-3}{20} = \ll \frac{c}{a} \gg$$

$$X_1 + X_2 = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Or } Y = \frac{1}{2} - 2X$$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2} - 2 \frac{2 + \sqrt{19}}{10} = \frac{5}{10} - \frac{4 + 2\sqrt{19}}{10} = \frac{1 - 2\sqrt{19}}{10}$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} - 2 \frac{2 - \sqrt{19}}{10} = \frac{5}{10} - \frac{4 - 2\sqrt{19}}{10} = \frac{1 + 2\sqrt{19}}{10}$$

Conclusion les deux couples solutions  $(\cos x, \sin x)$  sont :

$$\left( \frac{2 + \sqrt{19}}{10}, \frac{1 - 2\sqrt{19}}{10} \right) ; \left( \frac{2 - \sqrt{19}}{10}, \frac{1 + 2\sqrt{19}}{10} \right)$$

## Exercice 7

Soit l'équation  $2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2}$  (E)

Déterminer les couples  $(\cos x, \sin x)$  solutions de (E)

1) 1ère méthode :

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Longleftrightarrow 2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{5} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x \right) = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x = \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

$$\text{Donc il existe } \phi \text{ tel que } \cos \phi = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{D'autre part : } \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{20} \leq 1$$

Donc il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{19}{20}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$$

Remarque importante : on a CHOISI de prendre  $\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ .

On aurait pu choisir  $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

D'où

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Longleftrightarrow \cos \phi \cos x + \sin \phi \sin \alpha = \cos \alpha \\ &\Longleftrightarrow \cos(x - \phi) = \cos \alpha \\ &\Longleftrightarrow x - \phi = \alpha \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad x - \phi = -\alpha \quad [2\pi] \\ &\Longleftrightarrow x = \phi + \alpha \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \phi - \alpha \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Donc on a deux solutions :

- 1er cas :  $x = \phi + \alpha$   

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(\phi + \alpha) \\ &= \cos \phi \cos \alpha - \sin \phi \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{19}}{10} \end{aligned}$$

$$\sin x = \sin(\phi + \alpha)$$

$$\begin{aligned} &= \sin \phi \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{19}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Vérif : } \cos^2 x + \sin^2 x &= \frac{(2 - \sqrt{19})^2}{10^2} + \frac{(1 + 2\sqrt{19})^2}{10^2} \\ &= \frac{(4 + 19 - 4\sqrt{19}) + (1 + 4 \times 19 + 4\sqrt{19})}{100} \\ &= \frac{23 + 1 + 76}{100} = 1 \quad \text{Ca roule ma poule} \end{aligned}$$

• 2ème cas :  $x = \phi - \alpha$

$$\cos x = \cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha = \frac{2 + \sqrt{19}}{10}$$

$$\sin x = \sin \phi \cos \alpha - \cos \phi \sin \alpha = \frac{1 - 2\sqrt{19}}{10}$$

• Conclusion : on a deux solutions :  $(\cos x, \sin x) = \left( \frac{2 - \sqrt{19}}{10}, \frac{1 + 2\sqrt{19}}{10} \right)$   
ou  $(\cos x, \sin x) = \left( \frac{2 + \sqrt{19}}{10}, \frac{1 - 2\sqrt{19}}{10} \right)$

2) 2ème méthode :

$$(E) \quad \Longleftrightarrow 2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = \frac{1}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{2} - 2X = \frac{1 - 4X}{2}$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow X^2 + \left(\frac{1-4X}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4X^2 + (1-4X)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 4X^2 + 1 - 8X + 16X^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 20X^2 - 8X - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2 \times 4)^2 - 4 \times 20 \times (-3) = 4 \times 4^2 + 4 \times 60 = 4 \times 76 = 4 \times 4 \times 19 = 4^2 \times 19$$

$$X_1 = \frac{8 + 4\sqrt{19}}{2 \times 20} = \frac{2 + \sqrt{19}}{10} \quad X_2 = \frac{2 - \sqrt{19}}{10}$$

$$\text{Vérif : } X_1 X_2 = \frac{(2 + \sqrt{19})(2 - \sqrt{19} - 1)}{10^2} = \frac{4 - 19}{25} = \frac{-15}{100} = \frac{-3}{20} = \ll \frac{c}{a} \gg$$

$$X_1 + X_2 = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Or } Y = \frac{1}{2} - 2X$$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2} - 2 \frac{2 + \sqrt{19}}{10} = \frac{5}{10} - \frac{4 + 2\sqrt{19}}{10} = \frac{1 - 2\sqrt{19}}{10}$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} - 2 \frac{2 - \sqrt{19}}{10} = \frac{5}{10} - \frac{4 - 2\sqrt{19}}{10} = \frac{1 + 2\sqrt{19}}{10}$$

Conclusion les deux couples solutions  $(\cos x, \sin x)$  sont :

$$\left( \frac{2 + \sqrt{19}}{10}, \frac{1 - 2\sqrt{19}}{10} \right) ; \left( \frac{2 - \sqrt{19}}{10}, \frac{1 + 2\sqrt{19}}{10} \right)$$