

1 Généralités

1.1 Propriétés et transformations graphiques

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur D_f de graphique C_f . On définit les fonctions suivantes :

a) $\forall x \in D_f, g(x) = -f(x)$

C_g est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $(-x) \in D_f, g(x) = f(-x)$

C_g est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

c) Soit $a \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, g(x) = f(x) + a$

C_g est l'image de C_f par la translation verticale de vecteur $2\vec{j}$

d) Soit $a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $x + a \in D_f, g(x) = f(x + a)$

C_g est l'image de C_f par la translation horizontale de vecteur $-2\vec{i}$

e) Soit $a \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, g(x) = a.f(x)$

C_g est l'image de C_f par la dilatation verticale de rapport a

f) Soit $a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $a.x \in D_f, g(x) = f(a.x)$

C_g est l'image de C_f par la dilatation horizontale de rapport $1/a$

Définition 1 : Fonction paire

Une fonction f est **paire** sur un ensemble E si et seulement si

- E est centré (c'est-à-dire $\forall x \in E, -x \in E$)
- $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

Dans ce cas C_f , le graphique f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy)

Définition 2 : Fonction impaire

Une fonction f est **impaire** sur un ensemble E si et seulement si

- E est centré (c'est-à-dire $\forall x \in E, -x \in E$)
- $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$

Dans ce cas C_f , le graphique f est symétrique par rapport au centre O

Définition 3 : Fonction périodique

Soit f définie sur un ensemble E f est de période $T \in \mathbb{R}$ si et seulement si

- $\forall x \in E, x + T \in E$
- $\forall x \in E, f(x + T) = f(x)$

1.2 Bornes

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

Définition 4 : Majoration

- f est majorée par $M \in \mathbb{R}$ sur A ssi : $\forall x \in A, f(x) \leq M$
 M est appelé un majorant de f sur A
- f est majorée sur un ensemble A ssi :
 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leq M$

Définition 5 : Minoration

- f est minorée par $m \in \mathbb{R}$ sur A ssi : $\forall x \in A, m \leq f(x)$
 m est appelé un minorant de f sur A
- f est minorée sur un ensemble A ssi :
 $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq f(x)$

Définition 6 : Fonction bornée

f est bornée sur un ensemble A si et seulement si
 f est majorée et minorée sur A

Propriété 1 : Fonction bornée

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{l} f \text{ est bornée sur } A \\ \iff \exists K \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, |f(x)| \leq K. \\ \iff |f| \text{ est majorée sur } A \end{array} \right. \end{aligned}$$

Démonstration

- Supposons f bornée
Alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in A, m \leq f(x) \leq M$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq M \\ -f(x) \leq -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq \sup(M, -m) \\ -f(x) \leq \sup(M, -m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq K \\ -f(x) \leq K \end{cases} \text{ avec } K = \sup(M, -m)$$

$$\Rightarrow \sup(f(x), -f(x)) \leq K$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq K \text{ car } |f(x)| = \sup(f(x), -f(x))$$

De plus, $|f(x)| \geq 0$ donc $K \geq 0$

Il existe donc bien $K \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in A, |f(x)| \leq K$

et $|f|$ est bien majorée

- Réciproquement : supposons qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A, |f(x)| \leq K$$

$$\Rightarrow -K \leq f(x) \leq K \text{ } f \text{ est bien bornée} \quad \text{CQFD}$$

Définition 7 : Maximum, minimum

- f admet un maximum global en $x_0 \in A$ ssi

$$\forall x \in A, f(x) \leq f(x_0)$$

Le maximum de f est donc $f(x_0)$ et il est atteint en x_0

$$\text{On note } f(x_0) = \max_{x \in A} f(x) = \max_A f$$

- f admet un minimum global en $x_0 \in A$ ssi

$$\forall x \in A, f(x) \geq f(x_0)$$

$$\text{On note } f(x_0) = \min_{x \in A} f(x) = \min_A f$$

Remarques :

- Si f est majorée, alors elle admet une infinité de majorant. En effet, si f est majorée par M , elle l'est aussi par $M+1, M+2$, etc.
- $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto 1/x$ est minorée (par 0) mais n'admet pas de minimum
- S'il existe, le maximum global sur A est unique

Par contre il peut être atteint en différents points

Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$.

Le maximum de f est 1 et il est atteint en 0, 2π , 4π ...

Définition 8 : Monotonie

- f est croissante sur I
 $\iff \forall (a, b) \in I^2, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- f est strictement croissante sur I
 $\iff \forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f est décroissante sur I
 $\iff \forall (a, b) \in I^2, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- f est strictement décroissante sur I
 $\iff \forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- f est monotone sur I
 $\iff f$ est croissante ou décroissante sur I

Exemple : la fonction $x \mapsto 1/x$ est-elle monotone sur $\mathbb{R}^*$?

Par contraposée on obtient les propriétés suivantes :

Propriété 2 : Monotonie

- 1) Si f est croissante sur I
 Alors $\forall (a, b) \in I^2, f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$
- 2) Si f est strictement croissante sur I
 Alors $\forall (a, b) \in I^2, f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$
- 3) Si f est strictement décroissante sur I
 Alors f est croissante sur I
 Donc $\forall (a, b) \in I^2, f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$

Remarques :

- 1) et 2) sont obtenus par contraposée des définitions.
- 3) est vrai, car f strictement croissante implique f croissante (au sens large), donc 1) s'applique aussi.
- Donc pour une fonction strictement croissante conserve les inégalités strictes ou larges dans un sens ($a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$) et dans l'autre sens ($f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$)

Ce n'est pas le cas pour les fonction croissantes (au sens large) :

Attention : Si f est croissante sur I ,

Alors $f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y$ est **FAUX**

En effet, il suffit de prendre une fonction constante.

2 Continuité

Définition 9 : Continuité en un point

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

($\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$)

Autrement dit :

f est continue en x_0 si et seulement si

Quand $x \rightarrow x_0$ alors $f(x) \rightarrow f(x_0)$

Définition 10 : continuité sur un ensemble

f est continue sur I si et seulement si

f est continue en tout point de I

Propriété 3 : Opérations

- Soient f, g deux fonctions continues en $x_0 \in I$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $af + bg, f.g$ sont continues en x_0 .
De plus, si $g(x_0) \neq 0$, alors f/g est également continue en x_0 .
- Soient f, g deux fonctions continues sur I et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $af + bg, f.g$ sont continues sur I .
De plus f/g est également continue en tout point x de I tel que $g(x) \neq 0$

Propriété 4 : $C^0(I)$

L'ensemble des application continues sur un intervalle I est noté $C^0(I)$.

Propriété 5 : Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $f(I) \subset J$ (c'est-à-dire $\forall x \in I, f(x) \in J$)

Alors $g \circ f$ est continue sur I .

3 Théorème de la bijection

Propriété 6 : Théorème de la bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si

- f est continue sur I
- f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .

Alors

- f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Sa bijection réciproque $f^{-1} : J = f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone
- De plus f^{-1} elle est de même monotonie que f , c'est-à-dire :
 f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si f est strictement croissante (resp. décroissante)

Propriété 7 : Cas d'un intervalle ouvert

Soit f continue et strictement croissante sur un intervalle $I =]a; b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Alors f réalise une bijection

de $I =]a, b[$ sur $f(I) =] \lim_{x \rightarrow a} f(x) ; \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$

Propriété 8 : Cas d'un intervalle semi-fermé

Soit f continue et strictement décroissante sur un intervalle $I = [a; b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Alors f réalise une bijection

de $I = [a; b[$ sur $f(I) =] \lim_{x \rightarrow b} f(x) ; f(a)]$

Remarque : On obtiendrait des propriétés similaires en remplaçant $[a, b[$ par $]a, b]$ ou bien encore en prenant f croissante.
A vous de les écrire !

Exemples

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
 f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
 Donc la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$ (au départ) et $\mathbb{R}^+$ (à l'arrivée) :
 $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$
 est une bijection
On dira plus simplement
 « f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. »
 Sa réciproque g^{-1} est également une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
 On reconnaît dans g^{-1} la fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$
- f est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
 Elle réalise donc une bijection (h) de $\mathbb{R}^-$ sur $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$.
 Sa réciproque h^{-1} est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^-$.
 On a en fait : $\forall x \in \mathbb{R}^+, h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
- Question subsidiaire : déterminer $h^{-1} \circ g$ et $g \circ h^{-1}$

Exemple 2 : $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$
 f est strictement croissante et continue sur $I = [-\pi/2, \pi/2]$

Donc elle établit une bijection g de $I = [-\pi/2, \pi/2]$ sur $f(I) = [-1, 1]$

Sa réciproque g^{-1} est une bijection de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ qui est également continue et strictement croissante.

Remarques : Cette fonction réciproque g^{-1} est notée $\arcsin$.
 On obtient de même les fonctions $\arccos$ et $\arctan$
 qui seront étudiées prochainement

4 Bijection

Définition 11 : Bijection (Rappel)

$f : E \rightarrow F$ est une bijection si et seulement si
 tout élément de F admet un unique antécédent dans E
 Ou encore
 Pour tout $y \in F$, il existe un **unique** $x \in E$ tel que : $y = f(x)$

Définition 12 : Réciproque (Rappel)

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors on définit sa bijection réciproque
 $f^{-1} : F \rightarrow E$ tel que
 Pour tous $x \in E, y \in F, \quad x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y$

A retenir

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$$

ou encore :

$$\forall x \in F, \forall y \in E, \quad y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

Remarque : Dans toutes ces formules, ainsi que dans la suite, il est essentiel de déterminer **à quels ensembles** appartiennent les différentes variables

Propriété 9 : Composée (1)

$$\begin{cases} \forall x \in F, (f \circ f^{-1})(x) = x \\ \forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x \end{cases}$$

Démonstration

- Mq $\forall x \in F, (f \circ f^{-1})(x) = x$

Soit $x \in F$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(y) \quad \text{avec} \quad y = f^{-1}(x)$$

On a $y \in E$

Or, d'après la définition de la réciproque $y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x$

Donc $(f \circ f^{-1})(x) = f(y) = x$

- Mq $\forall x \in E (f^{-1} \circ f)(x) = x$ (Même principe !)

Soit $x \in E$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \quad \text{en posant } y = f(x) \in F$$

Par définition de f^{-1} , on a : $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$

Donc $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(y) = x$ CQFD

Définition 13 : Application identité

Soit E un ensemble.

L'application identité est l'application de E dans E notée Id_E et définie par :

$$\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x$$

ou encore :

$$\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$$

Pour $f : E \rightarrow F$, on a : $f \circ \text{Id}_E = f$ et $\text{Id}_F \circ f = f$

Propriété 10 : Composée (2)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque.

Alors $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$

Démonstration

• $f \circ f^{-1} : F \rightarrow F$ et $\text{Id}_F : F \rightarrow F$

Même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée.

• $\forall x \in F, (f \circ f^{-1})(x) = x = \text{Id}_F(x)$ (d'après la propriété précédente)

• Conclusion : on a bien $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$

On fait de même pour montrer que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$

5 Dérivation

5.1 Définitions

Définition 14 : Rapport de Newton

Le rapport de Newton de f en a est le coefficient directeur de la droite (AM) avec $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$

Il est égal à $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Définition 15 : Dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe et est finie.}$$

Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque : Dans les calculs concrets, la formule $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ est souvent plus pratique à utiliser. (Car il est plus facile de raisonner avec des trucs qui tendent vers 0)

Exemples : Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto x^4$ en 2, en a , la dérivée de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ en 2, en $a > 0$

Propriété 11 : continuité et dérivabilité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a

Remarque : dans la pratique, cette propriété n'est pas très utile.

Définition 16 : Dérivée à gauche, à droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a})$$

existe et est finie.

Dans ce cas, on note

$$f'_a(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$(\text{resp. } f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h})$$

Exemple : $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0.

Propriété 12 formules de calculs

$$\begin{aligned}
 (a.f + bg)' &= a.f' + b.g' \\
 (f.g)' &= f.g' + f'.g \\
 (f^n)' &= n.f^{n-1}.f' \\
 \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'.g - f.g'}{g^2} \\
 (f \circ g)' &= (f' \circ g) \times g'
 \end{aligned}$$

Propriété 13 : Dérivée de la composée

$$\begin{aligned}
 &\text{Soient } g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ deux fonctions telles que} \\
 &g(I) \subset J, \quad g \text{ est dérivable en } a \in I \text{ et } f \text{ dérivable en } g(a) \in J \\
 &\text{Alors } g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est dérivable en } a \\
 &\text{et } (f \circ g)'(a) = (f' \circ g)(a).g'(a) = f'(g(a)).g'(a)
 \end{aligned}$$

Remarque : $g(I) \subset J$ équivaut à dire que : $\forall x \in I, g(x) \in J$
Cela garantit que pour tout $x \in I, f(g(x))$ est bien défini.

Définition 17 : Dérivée sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .
La fonction qui à tout point de I associe le nombre dérivé de f en ce point est appelée la fonction dérivée de f et est notée f' .

Propriété 14 Dérivée et tangente

- Si f est dérivable en a alors C_f admet une tangente en a de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors C_f admet une **tangente verticale** en a

Exemple : Dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 ?

Examinons si f est dérivable en 0

Rapport de Newton en 0 : Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. (Mais C_f admet une tangente verticale en $(0, 0)$)

5.2 Dérivées successives**Définition 18 : Dérivées successives**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
Si f' est dérivable, on note f'' la dérivée de f' , appelée *dérivée seconde* de f .
Si f'' est dérivable, on note $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ la dérivée troisième de f .
De même, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f si elle existe.
On a $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$
Par convention : $f^{(0)} = f$.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \dots\dots\dots & f''(x) &= \dots\dots\dots & f^{(3)}(x) &= \dots\dots\dots \\
 f^{(n)}(x) &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Définition 19 : Fonction de classe C^n

f est dite de classe C^n sur I si f est n fois dérivable et si sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue sur I .
 f est dite de classe C^0 si f est continue.
 f est dite de classe C^∞ si f admet des dérivées à tous les ordres.

Propriété 15 : $C^n(I)$

L'ensemble des fonction de classe C^n sur I est noté : $C^n(I)$
 $C^n(I)$ et $C^\infty(I)$ sont des sous-espaces vectoriels.

5.3 Fonctions monotones

Propriété 16 : Fonction constante

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a, b[$.
Alors f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si : $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$

Propriété 17 : Fonction monotone

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si :
 $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

Propriété 18 : fonction strictement monotone

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f' > 0$ sur $]a, b[$ (resp. $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$).
alors
 f est **strictement** croissante (resp. **strictement** décroissante) sur $[a, b]$

Propriété 19 : fonction strictement monotone (2)

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I telle que

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I \setminus F$ où F contient un *un nombre fini de points* de I
- $f' > 0$ sur $I \setminus F$ (resp. $f' < 0$ sur $I \setminus F$)

alors f est **strictement** croissante (resp. **strictement** décroissante) sur I

Définition 20 : Extremum local/ global

Soit f définie sur I et $a \in I$

- f admet un maximum global en $a \iff \forall x \in I, f(x) \leq f(a)$
- f admet un maximum local en a
 $\iff$ il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que
 $\forall x \in J, f(x) \leq f(a)$
- f admet un extremum local (resp. global) en a
 $\iff f$ admet un minimum ou un maximum local (resp. global) en a