

1 Croissance comparée

Propriété 1 : Croissance comparée

Pour $a > 0$ et $b > 0$ réels :

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \dots & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \dots & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = \dots & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^a \ln x} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln x|^b = \dots & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^a |\ln x|^b} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax} x^n = \dots & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{ax} x^n} = \dots \end{array}$$

Pour pouvoir justifier qu'on utilise bien la croissance comparée, il faut vérifier les 3 conditions suivantes

- 1) Avoir une forme indéterminée (FI)
- 2) Avoir un quotient ou un produit
- 3) N'avoir que des expressions du type e^{ax} , $|\ln x|^b$, x^c

Exercice 1 1) Les limites suivantes sont-elles résolues directement par croissance comparée ? 2) Dans tous les cas, les résoudre

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x} \\ \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x+1}} & \text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x/2} & \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^2} \end{array}$$

2 Négligeabilité

Exemples

- En $+\infty$
 x^3 « croît plus vite » que x^2

On va dire que x^2 est négligeable devant x^3

On notera : $x^2 = o(x^3)$ en $+\infty$

- En $+\infty$
 D'après la croissance comparée, e^x « croît plus vite » que x^3
 On va dire que x^3 est négligeable devant e^x
 Et on notera : $x^3 = o(e^x)$ en $+\infty$
- En 0
 x^3 tend « plus vite » que x^2 vers 0
 On va dire que x^3 est négligeable devant x^2
 Et on notera : $x^3 = o(x^2)$ en 0 (Noter que c'est le contraire de ce qu'on a en $+\infty$)

Définition 1 : Négligeabilité

Soit deux fonctions f et g définies au voisinage de a (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$)

On note $f(x) = o(g(x))$ en a ou $f = o(g)$ en a

et on lit « f est négligeable devant g en a »

si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exercice 2

- a) Traduire les croissances comparées en $+\infty$ et en 0 en termes de négligeabilité
- b) Comparer x^3 et $\sqrt[3]{x^5}$ en 0 et en $+\infty$
- c) Comparer $1/x^2$ et $1/x^3$ en 0 et en $+\infty$
- d) Comparer $\sqrt{1+x^3}$ et x en 0 et en $+\infty$

Propriété 2 : cas particulier

$$\| f(x) = o(1) \text{ en } a \iff \dots$$

Propriété 3 : combinaison linéaire

$$\| \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f = o(h) \text{ et } g = o(h) \Rightarrow (a.f + b.g) = o(h)$$

En particulier, on a par exemple : $f = o(4h) \Rightarrow f = o(h)$

3 Équivalents

Dans cet exercice, on **admet** que les fonctions usuelles sont dérivables. En utilisant la définition de la dérivée qu'on utilisera en 0 ou en 1, déterminer les limites suivantes :

Propriété 4 : Limites particulières

$$\left\| \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \dots & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \dots & \\ \alpha \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \dots & \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{x^\alpha - 1}{\dots} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \dots & \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{\sqrt{x} - 1}{\dots} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \dots \end{array} \right\|$$

En déduire enfin $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \dots$

Définition 2 : Équivalents

Soit deux fonctions f et g définies au voisinage de a (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$)

On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$

et on lit « f est équivalente à g en a »

si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exercice 4

Traduire les limites particulières précédentes en termes d'équivalents

Propriété 5 : Composée

On pose $X = h(x)$

Si $X = h(x) \rightarrow b$ quand $x \rightarrow a$

Et $f(X) \underset{X \rightarrow b}{\sim} g(X)$

Alors $f(h(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(h(x))$

Exercice 5 Trouver un équivalent simple de

- a) $e^{3x} - 1$ en 0 b) $e^{1/x} - 1$ en $-\infty$
 c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 d) $\sin 2x$ en 0
 e) $1 - \cos(3x)$ en 0 f) $\sqrt{\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + x + 1}}$ en $+\infty$

Les équivalents sont compatibles avec les opérations suivantes : multiplication, quotient, puissance fixée (c'est-à-dire ne dépendant pas de la variable). C'est-à-dire :

Propriété 6 : Opérations compatibles

Si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et $g \underset{a}{\sim} g_1$

Alors $\frac{f}{g} \underset{a}{\sim} \frac{f_1}{g_1}$ $f \cdot g \underset{a}{\sim} f_1 \cdot g_1$ $f^\alpha \underset{a}{\sim} (f_1)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{f_1}$

Exercice 6 Donner des équivalents simples de

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{\sin(2x^2)}{1 - \cos(3x)} & \text{en } 0 \quad g(x) = \sqrt{e^{3x} - 1} & \text{en } 0^+ \\ h(x) = (\tan(2x))^n & \text{en } 0 \quad i(x) = \tan(1/x) \cdot \ln \frac{x+1}{x-2} & \text{en } +\infty \end{array}$$

Attention : on ne peut pas additionner des équivalents. Sauf avec des **conditions très strictes** :

Propriété 7 : Somme (« Le gros bouffe le petit »)

$$\parallel \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \quad g = o(f) \text{ en } a \Rightarrow \alpha.f + \beta.g \underset{a}{\sim} \dots$$

Exercice 7

A) Donner des équivalents simples de

- a) $2x + 3 \ln x$ en $+\infty$ b) $2x + 5x^2$ en $+\infty$
 c) $2x + 5x^2$ en 0 d) $2x^3 + 5x^2 - 4x^4$ en 0, $+\infty$, 1
 e) $\frac{-2x^3 + 4x + 5}{3x^2 + x - 5}$ en $+\infty$

B) Déterminer un équivalent simple de $f(x) + g(x)$ avec :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^3 - 5x \quad g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -2x^2 + 2x + 1$$

Propriété 8 : Somme (bis)

$$\parallel \begin{array}{l} \text{Si} \quad f \underset{a}{\sim} \alpha.h \quad \text{et} \quad g \underset{a}{\sim} \beta.h \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha + \beta \neq 0} \\ \text{Alors} \quad f + g \underset{a}{\sim} (\alpha + \beta).h \end{array}$$

Exercice 8 Donner un équivalent simple de $(f + g)(x)$ dans chacun des cas suivants :

- a) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^2$ $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -3x^2$
 b) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^2 - x$ $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^2 + 2x$
 c) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^2$ $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -2x^2$

Propriété 9 : transitivités

$$\parallel \begin{array}{llll} [\quad f \underset{a}{\sim} g \quad \text{et} \quad g \underset{a}{\sim} h \quad] & \Rightarrow & \dots \\ [\quad f = o(g) \quad \text{et} \quad g = o(h) \quad] & \Rightarrow & \dots \\ [\quad f = o(g) \quad \text{et} \quad g \sim h \quad] & \Rightarrow & \dots \\ [\quad f \sim g \quad \text{et} \quad g = o(h) \quad] & \Rightarrow & \dots \end{array}$$