FE 09 a (suites)

Exercice 1
On définit la suite u par : $u_0 = 0$ $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

a) Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$ pour $n \geq 0$

b) Monter que la suite u est croissante

c) Que peut-on en déduire ?

d) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2
On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n+1}$.

a) Justifier que pour tout n, le nombre u_n est bien défini et strictement positif.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique.

c) Exprimer v_n en fonction de n, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que
$0 \leq u_n \leq 1,\quad 0 \leq v_n \leq 1 \quad \text{et } u_nv_n \to 1$
Que dire de ces suites ? (Vous pouvez appeler les gendarmes)

Exercice 4
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2u_n + 1$
Calculer u_n

Exercice 5
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes : (on donnera si possible la forme réelle)

a) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

b) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

c) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

d) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.

e) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 1
On définit la suite u par : $u_0 = 0$ $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

a) Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$ pour $n \geq 0$

b) Monter que la suite u est croissante

c) Que peut-on en déduire ?

d) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2
On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n+1}$.

a) Justifier que pour tout n, le nombre u_n est bien défini et strictement positif.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est une suite arithmétique.

c) Exprimer v_n en fonction de n, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que
$0 \leq u_n \leq 1,\quad 0 \leq v_n \leq 1 \quad \text{et } u_nv_n \to 1$
Que dire de ces suites ? (Vous pouvez appeler les gendarmes)

Exercice 4
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2u_n + 1$
Calculer u_n

Exercice 5
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes : (on donnera si possible la forme réelle)

a) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

b) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

c) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

d) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.

e) $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.