 FE 09 c (suites)

Exercice 1 Soit la suite u définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \mathrm{e}^x - 2$$

1) Étudier les variations de f
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solution $x_1 < x_2$
3) Pour $a > x_2$, étudier la monotonie, la convergence, la limite de u.
4) Pour $x_1 < a < x_2$, étudier la monotonie, la convergence, la limite de u.

Exercice 2 La suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1 + u_n^2)/2.$$

1) Étudier la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0.
2) Que se passe-t-il pour les valeurs de u_0 négatives) ?

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $\quad f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x}) \quad$ avec $a > 0$

On définit la suite u par : $\quad u_0 = \alpha > \sqrt{a} \quad$ et $\quad u_{n+1} = f(u_n)$

1) Étudier les variations de f
2) Résoudre d'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) < x$
3) Déduire de ce ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \sqrt{a}$
4) Étudier la monotonie, la convergence, la limite de la suite u.

Exercice 4

1) Représenter graphiquement $\quad f(x) = (1 - x)^2 \quad$ sur $[0,\ 1]$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad u_0 = 1/2 \quad$ et $\quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.
   Représenter et calculer les cinq premiers termes de cette suite sur le graphe.
   Que peut-on conjecturer de la suite (u_n) ?
3) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$
4) On pose $\quad g = f \circ f$. $\quad$ Etudier la fonction g sur $[0, 1]$
5) On se propose d'étudier les suites $\quad (v_n) = (u_{2n}) \quad$ et $\quad (w_n) = (u_{2n+1})$
   a) Etudier la monotonie de la suite (v_n) et montrer qu'elle converge vers une limite ℓ_1 qu'on déterminera.
   b) <u>En déduire</u> la monotonie de la suite (w_n), et sa limite.
6) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n)

Exercice 1 Soit la suite u définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \mathrm{e}^x - 2$$

1) Étudier les variations de f
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solution $x_1 < x_2$
3) Pour $a > x_2$, étudier la monotonie, la convergence, la limite de u.
4) Pour $x_1 < a < x_2$, étudier la monotonie, la convergence, la limite de u.

Exercice 2 La suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1 + u_n^2)/2.$$

1) Étudier la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0.
2) Que se passe-t-il pour les valeurs de u_0 négatives) ?

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $\quad f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x}) \quad$ avec $a > 0$

On définit la suite u par : $\quad u_0 = \alpha > \sqrt{a} \quad$ et $\quad u_{n+1} = f(u_n)$

1) Étudier les variations de f
2) Résoudre d'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) < x$
3) Déduire de ce ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \sqrt{a}$
4) Étudier la monotonie, la convergence, la limite de la suite u.

Exercice 4

1) Représenter graphiquement $\quad f(x) = (1 - x)^2 \quad$ sur $[0,\ 1]$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad u_0 = 1/2 \quad$ et $\quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.
   Représenter et calculer les cinq premiers termes de cette suite sur le graphe.
   Que peut-on conjecturer de la suite (u_n) ?
3) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$
4) On pose $\quad g = f \circ f$. $\quad$ Etudier la fonction g sur $[0, 1]$
5) On se propose d'étudier les suites $\quad (v_n) = (u_{2n}) \quad$ et $\quad (w_n) = (u_{2n+1})$
   a) Etudier la monotonie de la suite (v_n) et montrer qu'elle converge vers une limite ℓ_1 qu'on déterminera.
   b) <u>En déduire</u> la monotonie de la suite (w_n), et sa limite.
6) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n)