Nom **(08/12/25) Interro 12 (fictive)** **2025-26 PCSI (Corrigé)**

1) La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ (C 099b)

2) $\sin(-\pi/3)=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ (C 100b)

3) $-\cos(x)=\cos(\quad x+\pi\quad)=\cos(\quad -x+\pi\quad)$ (C 111c)

4) $\forall x\in\mathbb{R},\quad |\mathrm{e}^{ix}|=\quad 1$ (C 242)

5) Pour $z\in\mathbb{C},\quad \arg(\mathrm{e}^z)=\quad \mathrm{Im}(z)\quad [2\pi]$ (C 253)

> Pour $\quad z=a+\mathbf{i}b,\quad \mathrm{e}^z=e^a\mathrm{e}^{\mathbf{i}b}$
> $\Rightarrow\quad \arg(\mathrm{e}^z)=\arg(\mathrm{e}^{\mathbf{i}b})=b=\mathrm{Im}(z)\quad[2\pi]$

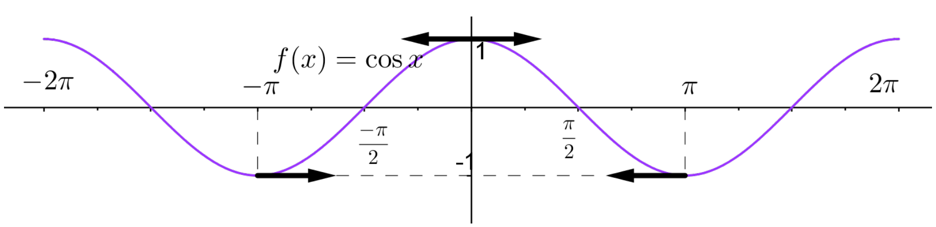
6) 3 points distincts $A,\ B,\ C$ d'affixes respectives $a,\ b,\ c$ (C 351d)

$$(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA})=\quad\arg\left(\frac{z(\ \overrightarrow{BA}\ )}{z(\ \overrightarrow{BC}\ )}\right)=\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)$$

7) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $\quad g(x)=f(1/x)$ (C 419b)

$g'(x)=f'(1/x)\times(\dfrac{-1}{x^2})$

8) Tracer l'allure de la courbe de $\quad x\mapsto\cos x$ sur $[-2\pi,\ 2\pi]$ (C 447b)



9) (u_n) arithmétique $\quad\Rightarrow\quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n}u_k=(n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$ (C 511a)

10) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^{2k}=\sum_{k=1}^{n}(x^2)^k$ (C 517a)

Si $x^2\neq 1,\quad S_n=x^2\dfrac{1-x^{2n}}{1-x^2}=\dfrac{x^2-x^{2n+2}}{1-x^2}$

Si $x^2=1\iff(x=1$ ou $x=-1)\quad S_n=n$

11) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ (C 545a)

<u>Cas $\Delta>0$</u> avec <u>$\Delta=a^2+4b$</u>

Alors les solutions <u>réelles</u> sont de la forme : $\quad u_n=\lambda.{r_1}^n+\mu.{r_2}^n$

avec $\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad$ et $\quad r_1,\ r_2\quad$ racines de l'équation $\quad r^2=a.r+b$

12) Soit la suite (u_n) définie par : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-2u_n+6$ (C 549a)

Exprimer u_n en fonction de n et u_0 :

Point fixe ℓ : $\quad\ell=-2\ell+6\quad\iff\quad\ell=2$

Par soustraction : $\quad u_{n+1}-\ell=-2(u_n-\ell)\quad$ (suite géométrique)

$\Rightarrow\quad u_n-\ell=(-2)^n(u_0-\ell)$

$\Rightarrow\quad u_n=\ell+(-2)^n(u_0-\ell)=2+(-2)^n(u_0-2)$

13) Soit $a\in\mathbb{R}$ et $r>0$ (C 565b)

$\forall x\in\mathbb{R},\quad x\in[a-r,\ a+r]\quad\iff\quad \underline{|x-a|\leq r}$

14) $\quad\max(x_1,\ \ldots,\ x_n)\geq a$ (C 589d)

$\iff\quad x_1\geq a\quad$ **ou** $\quad x_2\geq a\quad$ ou ... ou $\quad x_n\geq a$

$(\quad\iff\quad\exists i\in[[1,n]],\ x_i\geq a\quad)$

15) Définition de la factorielle : $\begin{cases}0!=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)!=(n+1)\times n!\end{cases}$ (C 620)

> Dans une définition par récurrence il faut 1) une relation de récurrence, et ne pas oublier 2) l'<u>initialisation</u>

16) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=2^n$ (C 640a)

17) Soit $\mathcal{P}$ une propriété (C 712b)

$\quad\forall(x,y)\in E^2,\ \left[\ \mathcal{P}(x)\text{ et }\mathcal{P}(y)\ \right]\Rightarrow x=y$

signifie que : il existe <u>au plus</u> une valeur x de E vérifiant la propriété $\mathcal{P}$

18) Schéma de démonstration de : $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ (C 722a)

[Début :] Supposons P ou Q

1er cas : On a P	2ème cas : on a Q
...	...
Alors R	Alors R

[Fin :] Dans tous les cas, on a R

19) LP avec $\sqrt{\ }$ et $\underline{x \to 0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ (C 805a)

20) Montrons que $\forall x \leq 0, \quad 0 < a \leq b \Rightarrow a^x \geq b^x$ (C 810e)

(Rappel : on a $a^x = \mathrm{e}^{x.\ln a}$)

Soit $x \geq 0$. Supposons $0 < a \leq b$

$\Rightarrow \quad \ln a \leq \ln b$ (car $\ln$ croissante sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \quad x.\ln a \geq x.\ln b$ car $x \leq 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x.\ln a} \geq \mathrm{e}^{x.\ln b}$ car exp croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad a^x \geq b^x$

21) Vrai ou faux ? .... **FAUX** (C 830a)

Si f et g admettent des limites en a,

Alors $f \underset{a}{\sim} g \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

> Explication : la réciproque est fausse.
> Par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ en 0
> $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et pourtant $f \underset{a}{\not\sim} g$
> Remarque : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si les limites existent,
> alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

22) Donner les deux cas (C 835)
où on peut trouver l'équivalent de la somme $f+g$ de deux fonctions

- $f \sim a.h$ et $g \sim b.h$ avec $a+b \neq 0$
- $f = o(g)$ ou $g = o(f)$

23) Le domaine des valeurs de arccos est : $[0,\pi]$ (C 900b)

24) Tableau de variations complet de arctan (C 907c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
arctan	$-\pi/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\pi/2$

25) $\arctan(\tan \frac{5\pi}{8}) = \arctan\left(\tan(\frac{5\pi}{8} - \pi)\right)$
$= \arctan\left(\tan \frac{-3\pi}{8}\right) = \frac{-3\pi}{8}$ car $\frac{-3\pi}{8} \in]-\pi/2,\ \pi/2[$ (C 918)

26) Equ. de la tangente à C_f en a : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ (C 1012)

27) Soit f continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I = \big[a,\ b\big[$
Alors f réalise une bijection ... (C 1030c)

de $I = \big[a,\ b\big[$ sur $J = f(I) = \Big]\lim\limits_{x\to b} f(x); f(a)\Big]$

> Explications
> - f est décroissante donc il faut inverser les bornes dans $f(I)$.
> - f définie sur $\big[a, b\big[$, donc pas définie en b. $f(b)$ n'existant, il faut remplacer par la limite.
> - Par contre f est définie en a, donc pas besoin de chercher la limite en a

28) Dérivabilité et dérivée de la réciproque en $y \in J$ (C 1036c)

Soit f une bijection de I sur J
Si f est dérivable en $\underline{x = f^{-1}(y)}$ et $\underline{f'(x) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en y et $\boxed{f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}}$

29) Pour $a > 0$, $\displaystyle\int^u a^x\ \mathrm{d}x = \int^u \mathrm{e}^{x.\ln a}\ \mathrm{d}x = \frac{u^x}{\ln a}$ sur $\mathbb{R}$ (C 1057)

> Attention : la primitive dépend de u et pas de la variable d'intégration x

30) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(-2t+3)^4} = \int^x (-2t+3)^{-4}\ \mathrm{d}t$ (C 1071)

$\displaystyle = \int^x \frac{1}{6}(-3)(-2)(-2t+3)^{-4}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{6}(-2x+3)^{-3} = \frac{1}{6(-2x+3)^3}$

sur $]-\infty;3/2[$ ou sur $]3/2;+\infty[$ Formule utilisée : $[u^{-3}]' = -3u'.u^{-4}$

31) Soit (u_n) une suite réelle (C 1202b)

M n'est pas un majorant de la suite u $\iff$ $\exists n \in \mathbb{N}, M < u_n$

C'est la négation de « M est un majorant de la suite u
$\iff$ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$

32) Vrai ou faux ? . . . **Vrai** (C 1226b)

Si la suite (u_n) n'est pas bornée alors (u_n) ne converge pas

C'est vrai car on a par contraposée :
Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée