Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions f_n par $f_n(x) = x^n \ln x$ pour $x \in]0; +\infty[$. On note C_n la courbe représentative de f_n

1) Etude des courbes C_n

a) Étudier les variations de f_1 , ses limites en 0 et $+\infty$, dresser son tableau de variation.

- $f_1(x) = x \ln x$ f_1 est bien définie (car $x > 0$) et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonction usuelles
- Dérivée
$$f_1'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Attention : Etudier les points pour lesquelles la dérivée s'annule ($f_1'(x) = 0$) ne suffit pas à justifier les variations de f_1. Il faut étudier le signe de la dérivée.

- Signe de la dérivée
$f_1'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$
- Limites
  * Quand $x \to 0^+$, $x \ln x \to 0$ (par croissance comparée)
  $$\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$$
  * $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$
- Tableau de variations

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1/e) = (1/\mathrm{e}) \ln(1/\mathrm{e}) = (1/\mathrm{e})(-1) = -1/\mathrm{e}$

b) On revient au cas général.
Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$

- En 0

Quand $x \to 0^+$
$x^n \to 0$
$\ln x \to -\infty$
$x^n \ln x \to 0$ (par croissance comparée)
$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$$
- En $+\infty$ Quand $x \to +\infty$
$x^n \to +\infty$
$\ln x \to +\infty$
$x^n \ln x \to +\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

c) Déterminer les variations de f_n et dresser le tableau de variations

- f_n est définie dérivable sur $]0; +\infty[$ (produit de fonction dérivables)
- calcul de f_n'
$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (x^n)'(\ln x) + (x^n)(\ln x)' \\ &= (nx^{n-1})(\ln x) + x^n \frac{1}{x} \\ &= x^{n-1}(n \ln x + 1) \end{aligned}$$
- signe de f_n'
$$\forall x > 0,\ x^{n-1} > 0$$
Donc
$$f_n'(x) > 0$$
$$\iff \quad n \ln x + 1 > 0$$
$$\iff \quad x > \mathrm{e}^{-1/n}$$
- Tableau de variations

x	0		$\mathrm{e}^{-1/n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	0	$\searrow$	$-1/(n\mathrm{e})$	$\nearrow$	$+\infty$

- $f_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = (\mathrm{e}^{-1/n})^n \ln(\mathrm{e}^{-1/n}) = \mathrm{e}^{-1} \times \dfrac{-1}{n} = \dfrac{-1}{n\mathrm{e}}$

d) Déterminer l'équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point d'abscisse 1.

$f_n(x) = x^n \ln x \quad \Rightarrow \quad f_n(1) = 0$
$f_n'(x) = x^{n-1}(n \ln x + 1) \quad \Rightarrow \quad f_('1) = 1$

Donc la tangente en 1 a pour équation $y = 1.(x-1) + 0 = x - 1$

e) Déterminer la position relative de C_n et C_{n+1}

C_{n+1} au dessus de C_n

$\iff f_{n+1}(x) > f_n(x)$

$\iff f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$

$\iff x^{n+1}\ln x - x^n \ln x > 0$

$\iff x^n(x-1)\ln x > 0$

Faisons un tableau de signes

$\ln x > 0 \iff x > 1$

x	0	1	$+\infty$
x^n	$+$		$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\ln x$	$-$	0	$+$
$f_{n+1} - f_n(x)$	$+$	0	$+$

Conclusion : C_{n+1} est toujours au dessus de C_n. Elles sont sécantes pour $x = 1$

f) On note x_n la valeur pour laquelle f_n atteint un extremum.
Étudier la monotonie de la suite (x_n)

f_n atteint son minimum pour $x_n = \mathrm{e}^{-1/n}$

La suite $(1/n)$ est décroissante $\Rightarrow$ $(-1/n)$ croissante $\Rightarrow$ $\mathrm{e}^{-1/n}$ croissante (car exp est croissante)

Conclusion : la suite (x_n) est croissante

g) On note M_n le point extremum de la courbe C_n (qui a donc pour abscisse x_n). Montrer que ce point appartient à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}}$.

D'après ce qui précède : $x_n = \mathrm{e}^{-1/n}$ et $y_n = f_n(x_n) = \dfrac{-1}{n.\mathrm{e}}$

$y_n = \dfrac{-1}{n.\mathrm{e}} \Rightarrow \dfrac{-1}{n} = .\mathrm{e}.y_n$

D'où $x_n = \exp(-1/n) = \exp(\mathrm{e}y_n)$

$\Rightarrow \ln(x_n) = \mathrm{e}.y_n \Rightarrow \dfrac{\ln(x_n)}{\mathrm{e}} = y_n$

Donc M_n appartient à la courbe (Γ) d'équation $y = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}}$

h) Sur le graphique ci-joint, on a représenté la courbe Γ. Sur ce même graphique, tracer l'allure des courbes $C_1,\ C_2,\ C_3$
(On ne cherchera pas à calculer précisément les valeurs de x_1, x_2, x_3. Par contre, on sera attentif à faire un graphique cohérent avec les résultats précédents).

Sur le graphique ci-joint, on a représenté la courbe Γ. Sur ce même graphique, tracer l'allure des courbes $C_1,\ C_2,\ C_3$
(On ne cherchera pas à calculer précisément les valeurs de x_1, x_2, x_3. Par contre, on sera attentif à faire un graphique cohérent avec les résultats précédents).

N'ayant pas de calculatrice, il est absurde et impossible de tracer les courbes points par points. Ce qu'on attend donc de vous, c'est que vous regroupiez sur un graphique les informations à disposition.

Faisons-en la liste :

- Les courbes $C_1,\ C_2,\ C_3$ admettent leurs minima pour $x_1 = \mathrm{e}^{-1},\ x_2 = \mathrm{e}^{-1/2}$ et $x_3 = \mathrm{e}^{-1/3}$
  avec $x_1 < x_2 < x_3$
- Ces minimums sont tous sur la courbe (Γ)
- $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$ donc les courbes vont (presque) passer par le point $(0,\ 0)$
- On a $C_1 << C_2 << C_3$
- Les trois courbes ont la même tangente de pente 1 en $x = 1$

En voiture Simone !

1) Je place $x_1,\ x_2,\ x_3$ dans l'ordre là où je peux
2) Je place les sommets $M_1 M_2$ et M_3 sur (Γ)
3) Je trace la tagente en $x = 1$
4) Je trace les trois courbes

Bien entendu, ce n'est pas du tout le tracer « réel » des courbes (de toute façon, tout tracer, même le plus précis, n'est toujours qu'une représentation de la réalité. Ne serait-ce que parce que la courbe pour être lisible doit avoir une épaisseur non nulle, ce qui est contraire à la « réalité »).
En tout cas, ma représentation est cohérente avec les données trouvée précédemment. Que peut exiger de plus le bon peuple ?
Pour le plaisir des yeux, vous trouverez en fin de corrigé une représentation plus « exacte » des courbes.

2) Etude d'une suite

a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$
On notera dans la suite u_n cette solution.

Sur l'intervalle $]e^{-1/n}; +\infty[$, $\quad f_n' > 0$

Or $\quad e^{-1/n} < 1$

Donc

- sur l'intervalle $[1, +\infty[$, $\quad f_n$ est continue et strictement croissante
- $f_n(1) = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

$\rightarrow$ Donc f_n réalise une bijection de $\quad I = [1,\ +\infty[\quad$ sur $\quad f_n(I) = [0; +\infty[$

- Or $\quad 1 \in f_n(I)$

$\rightarrow$ Donc l'équation $\quad f_n(x) = 1 \quad$ admet une unique solution u_n dans $[1; +\infty[$

b) En utilisant 1)e), montrer que la suite (u_n) est décroissante

On a vu en 1)e) que, $\quad \forall x > 0,\ f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

Donc, en remplaçant x par u_n

$$f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$$

Or, par définition $\quad f_n(u_n) = 1 = f_{n+1}(u_{n+1})$

D'où

$$f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$$

Or, la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $I = [1; +\infty[$ et $(u_n,\ u_{n+1}) \in I^2$

Donc $\quad f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad u_n \geq u_{n+1}$

Cela prouve que la suite (u_n) est décroissante

c) Montrer que la suite u_n converge vers une limite ℓ.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1

Donc elle converge vers une limite (inconnue) $\ell \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq \ell \leq u_n$$

d) Montrer que : $\quad \forall n \geq 1, \quad 0 \leq f_n(\ell) \leq 1 \quad$ (On pourra utiliser la monotonie de f_n sur $[1; +\infty[$

f_n est croissante sur $I = [1; +\infty[$ et $\quad 1 \leq \ell \leq u_n$

$\Rightarrow \quad f_n(1) \leq f_n(\ell) \leq f_n(u_n)$

$\Rightarrow \quad 0 \leq f_n(\ell) \leq 1$

e) En déduire que $\ell = 1 \quad$ (On pourra faire un raisonnement par l'absurde)

On a, pour tout $n \geq 1, \quad 0 \leq f_n(\ell) \leq 1$

C'est-à-dire $\quad 0 \leq \ell^n \ln \ell \leq 1$

<u>Supposons $\ell > 1$</u> Dans ce cas $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = +\infty$

De plus $\ln \ell > 0$

Donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n \ln \ell = +\infty$

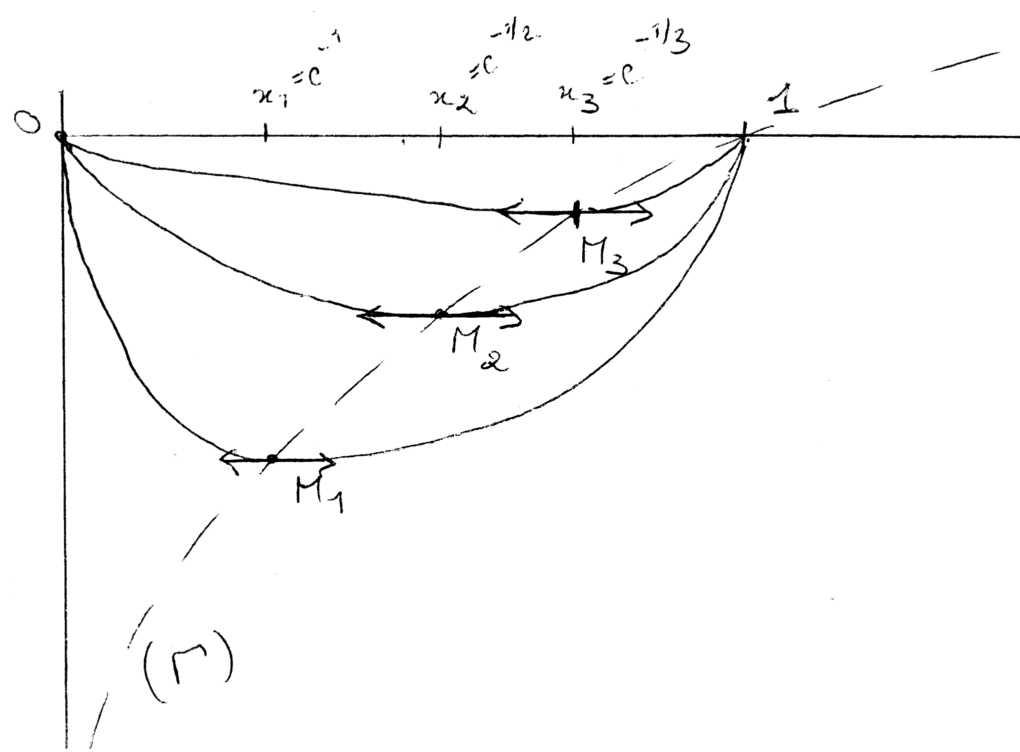
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\ell) = +\infty$

C'est manifestement impossible car $\quad \leq f_n(\ell) \leq 1$

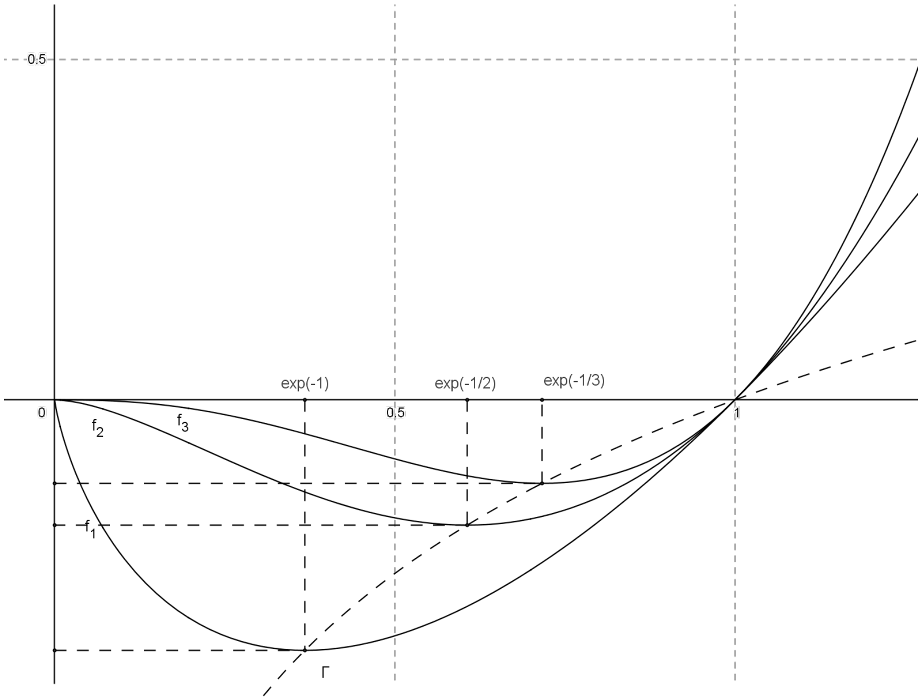
<u>Conclusion</u> $\quad \ell > 1 \quad$ est impossible. D'où $\quad \ell \leq 1$

Or on a vu $\quad 1 \leq \ell$. $\quad$ Donc on a $\quad \ell = 1$

Voici la représentation moche :



Voici la belle représentation (en trichant !) :



0.5
exp(-1)
exp(-1/2)
exp(-1/3)
0
0,5
1
f2
f3
f1
Γ