 FE 09 d (suites)

Exercice 1 Déterminer l'expression explicite des suites suivantes

a) $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \quad u_0 = 3$

b) $u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad u_0 = 2$

c) $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n, \quad u_0 = 1; u_1 = 3$

d) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \quad u_0 = 2; u_1 = 3$ (Donner sous forme réelle)

e) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, \quad u_0 = 2; u_1 = 1$

f) $u_{n+2} = 2\mathbf{i}u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = 1; u_1 = 2$

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^2} \quad$ et $\quad S'_n = S_n + \dfrac{1}{n}$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Exercice 3 On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \qquad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1) Montrer que $\quad \forall x > 0,\ \ln x \leq x - 1.$

2) Montrer que ces deux suites sont monotones, convergentes et ont la même limite que l'on notera ℓ.

3) Déterminer $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_n) \quad$ et en déduire $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{n+k}$

Exercice 4 Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\arccos x < \pi/4$
b) $\arccos x > -\pi/3$ c) $\arccos x > \pi/3$ d) $\arcsin x > \pi/4$
e) $\arcsin x < -\pi/3$ f) $\arctan x < \pi/4$ g) $\arctan x > -2\pi/3$

Exercice 6 Traduire les phrases suivantes avec les quantificateurs

a) La fonction f n'est pas décroissante sur I

b) La fonction f n'est pas strictement croissante sur I

c) La suite (u_n) est minorée

d) La suite (u_n) n'est pas majorée

e) M n'est pas un majorant de la suite u

Exercice 1 Déterminer l'expression explicite des suites suivantes

a) $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \quad u_0 = 3$

b) $u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad u_0 = 2$

c) $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n, \quad u_0 = 1; u_1 = 3$

d) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \quad u_0 = 2; u_1 = 3$ (Donner sous forme réelle)

e) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, \quad u_0 = 2; u_1 = 1$

f) $u_{n+2} = 2\mathbf{i}u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = 1; u_1 = 2$

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^2} \quad$ et $\quad S'_n = S_n + \dfrac{1}{n}$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Exercice 3 On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \qquad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1) Montrer que $\quad \forall x > 0,\ \ln x \leq x - 1.$

2) Montrer que ces deux suites sont monotones, convergentes et ont la même limite que l'on notera ℓ.

3) Déterminer $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_n) \quad$ et en déduire $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{n+k}$

Exercice 4 Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\arccos x < \pi/4$
b) $\arccos x > -\pi/3$ c) $\arccos x > \pi/3$ d) $\arcsin x > \pi/4$
e) $\arcsin x < -\pi/3$ f) $\arctan x < \pi/4$ g) $\arctan x > -2\pi/3$

Exercice 6 Traduire les phrases suivantes avec les quantificateurs

a) La fonction f n'est pas décroissante sur I

b) La fonction f n'est pas strictement croissante sur I

c) La suite (u_n) est minorée

d) La suite (u_n) n'est pas majorée

e) M n'est pas un majorant de la suite u