Exercice 1

On définit la suite u suivante : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{-3u_n + 18} \\ u_0 = -1 \end{cases}$

1) Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite u
Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite u ?
2) On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$
Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence des suites v et w ?
3) Étudier les variations de la fonction f définie sur $]-\infty,\ 6]$ par :
$f(x) = \sqrt{-3x + 18}$
4) En déduire par récurrence que : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n \leq 5$
5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ sur $]-\infty,\ 6]$ admet une unique solution notée ℓ que l'on déterminera
6) Montrer que pour $x \in]-\infty,\ 6],\ f(x) - 3 = \dfrac{-3}{\sqrt{-3x+18}+3}(x-3)$
7) En déduire que pour $x \in [0,\ 5],\ |f(x) - 3| \leq \dfrac{3}{\sqrt{3}+3}|x-3|$
8) En déduire que, pour tout $n \geq 1,\ |u_n - 3| \leq \left(\dfrac{3}{\sqrt{3}+3}\right)^{n-1} |u_1 - 3|$
9) Que peut-on en déduire pour la suite u ?

Exercice 1

On définit la suite u suivante : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{-3u_n + 18} \\ u_0 = -1 \end{cases}$

1) Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite u
Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence de la suite u ?
2) On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$
Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence des suites v et w ?
3) Étudier les variations de la fonction f définie sur $]-\infty,\ 6]$ par :
$f(x) = \sqrt{-3x + 18}$
4) En déduire par récurrence que : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq u_n \leq 5$
5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ sur $]-\infty,\ 6]$ admet une unique solution notée ℓ que l'on déterminera
6) Montrer que pour $x \in]-\infty,\ 6],\ f(x) - 3 = \dfrac{-3}{\sqrt{-3x+18}+3}(x-3)$
7) En déduire que pour $x \in [0,\ 5],\ |f(x) - 3| \leq \dfrac{3}{\sqrt{3}+3}|x-3|$
8) En déduire que, pour tout $n \geq 1,\ |u_n - 3| \leq \left(\dfrac{3}{\sqrt{3}+3}\right)^{n-1} |u_1 - 3|$
9) Que peut-on en déduire pour la suite u ?