1 Rappels

Propriété 1 : fonction puissance

La notation a^b a un sens (existe) dans les deux cas suivants :

- ou bien $a > 0$ réel et $b \in \mathbb{R}$ quelconque
  et dans ce cas : $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$
- ou bien $a \in \mathbb{R}$ quelconque et $b \in \mathbb{Z}$ entier

Dans le premier cas : $(2,7)^{3,4} = \mathrm{e}^{3,4 \ln(2,7)}$
Dans le deuxième cas : $(-3,2)^3 = (-3,2) \times (-3,2) \times (-3,2)$
et $(-3,2)^{-2} = \dfrac{1}{(-3,2) \times (-3,2)}$

Par contre : $(-2)^{3,4}$ n'a pas de sens.

Propriété 2 : Limites

Soit $a > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0^+ & \text{si } a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0^+ & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

Propriété 3 : formes indéterminées

Les 4 principales formes indéterminées sont :

$$\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Une forme semi indéterminée : $\dfrac{1}{0}$

2 Croissance comparée

Pour pouvoir justifier qu'on utilise bien la croissance comparée, il faut vérifier les 3 conditions suivantes

1) Avoir une forme indéterminée (FI)
2) Avoir un quotient ou un produit
3) N'avoir que des expressions du type e^{ax}, $|\ln x|^b$, x^c

Propriété 4 : Croissance comparée

Pour $a > 0$ et $b > 0$ réels et $n \geq 1$ entier :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ \ln x = 0^- \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^a \ \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ |\ln x|^b = 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^a \ |\ln x|^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{ax} x^n = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{ax} x^n} = \pm\infty$$

Exemples : les expressions suivantes ne se justifient pas (directement) par la croissance comparée.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \ln x$ car ce n'est pas une FI
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - \ln x$ car ce n'est ni un quotient ni un produit
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$ car ce ne sont pas des fonctions de base

3 négligeabilité

Remarque préliminaire :

Dans ce qui suit, on n'utilisera que des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a). On pourra donc former sans problème des quotients au voisinage de a

Définition 1 : Négligeabilité

Soit deux fonctions f et g définies au voisinage de a (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$)

On note $f(x) = o(g(x))$ en a

ou plus simplement $f = o(g)$ en a

et on lit « f est négligeable devant g en a »

si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Propriété 5 : cas particulier

$$f(x) = o(1) \quad \text{en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

Propriété 6 : combinaison linéaire

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad f = o(h) \text{ et } g = o(h) \quad \Rightarrow \quad (a.f + b.g) = o(h)$$

Propriété 7

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \quad f = o(a.h) \quad \Rightarrow \quad f = o(h)$$

Par exemple : $f = o(4h) \quad \Rightarrow \quad f = o(h)$

Propriété 8 : transitivité

$$f = o(g) \quad \text{et} \quad g = o(h) \quad \Rightarrow \quad f = o(h)$$

Propriété 9 : produit

$$f = o(f_1) \text{ et } g = o(g_1) \quad \Rightarrow \quad f.g = o(f_1 g_1)$$

$$f = o(f_1) \quad \Rightarrow \quad f.g = o(f_1.g)$$

4 Limites particulières et équivalents

Propriété 10 : dérivée et rapport de Newton

Si une fonction f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En particulier en 0 :

Si f est dérivable en 0, alors $\displaystyle f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

Cela permet d'obtenir les limites particulières suivantes (sauf la dernière) :

Propriété 11 : Limites particulières

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Démonstration La dernière limite s'obtient ainsi :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\cos 0 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$$

On pose $X = x/2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2X$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 X}{(2X)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin X}{X}\right)^2$$

Quand $x \to 0,\ X = x/2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin X}{X} \to 1$ (limite particulière)

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

5 Équivalents

5.1 Premiers équivalents

Définition 2 : Équivalents

Soit deux fonctions f et g définies au voisinage de a (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$)

On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$

et on lit « f est équivalente à g en a »

si et seulement si $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

D'après les limites particulières, on obtient :

Propriété 12 : Équivalents particuliers

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1 \qquad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

$(1+x)^a - 1 \underset{x\to 0}{\sim} ax \qquad x^a - 1 \underset{x\to 1}{\sim} a(x-1) \qquad (a \in \mathbb{R}^*)$

$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x \qquad \sqrt{x} - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}(x-1)$

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$

5.2 Propriétés

Propriété 13 : Équivalent et limite

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Attention : la réciproque est fausse

Exemple : $\dfrac{-2x^3+4x+5}{3x^2+x-5} \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{-2x^3}{3x^2} \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{-2x}{3}$

Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x^3+4x+5}{3x^2+x-5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x}{3} = +\infty$

Contre Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Et pourtant , on n'a pas $2x^3 \underset{+\infty}{\sim} x^3$

Propriété 14 : Limite finie non nulle

Soit ℓ un réel non nul

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$

Les équivalents sont compatibles avec les opérations suivantes : multiplication, quotient, puissance fixée (cad ne dépendant pas de la variable) :

Propriété 15 : Opérations compatibles

Si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et $g \underset{a}{\sim} g_1$

Alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{f_1}{g_1} \quad f.g \underset{a}{\sim} f_1.g_1 \quad \sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{f_1} \quad f^\alpha \underset{a}{\sim} (f_1)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$

Propriété 16 : Composée

On a $X = h(x)$

Si $X = h(x) \to b$ quand $x \to a$

Et $f(X) \underset{X\to b}{\sim} g(X)$

Alors $f(h(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(h(x))$

Exemples

- $\boxed{\text{Trouver un équivalent de } \mathrm{e}^{3x}-1 \text{ en } 0}$

  $\mathrm{e}^{3x} - 1 = \mathrm{e}^X - 1$ avec $X = 3x$

  Quand $x \to 0$, $X \to 0$ (Attention : cette ligne est essentielle)

  Or $\mathrm{e}^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X \Rightarrow \mathrm{e}^{3x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 3x$

- $\boxed{\text{Trouver un équivalent de } \mathrm{e}^{1/x}-1 \text{ en } -\infty}$

  $\mathrm{e}^{1/x} - 1 = \mathrm{e}^X - 1$ avec $X = 1/x$

  Quand $x \to -\infty$, $X \to 0$

  Or $\mathrm{e}^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X \Rightarrow \mathrm{e}^{1/x} - 1 \underset{x\to-\infty}{\sim} 1/x$

5.3 Sommes

Attention : on ne peut pas additionner des équivalents. Sauf avec des **conditions très strictes** :

Propriété 17 : Somme (« Le gros bouffe le petit »

$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^*, \quad g = o(f) \quad \Rightarrow \quad \alpha.f + \beta.g \underset{a}{\sim} \alpha.f$

Exemples :
- En $+\infty$, $\ln x = o(x)$
  Donc $x + \ln x \underset{+\infty}{\sim} x$
- En $+\infty$, $x = o(x^2)$
  Donc $2x + 5x^2 \underset{+\infty}{\sim} 5x^2$
- En 0 $x^4 = o(x^2) \quad \Rightarrow \quad 5x^4 - 2x^2 \underset{0}{\sim} -2x^2$
- En $+\infty$ $\dfrac{-2x^3+4x+5}{3x^2+x-5} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-2x^3}{3x^2} = \dfrac{-2x}{3}$

Propriété 18 : Somme (Équivalents de même espèce)

> Si $f \underset{a}{\sim} \alpha.h$ et $g \underset{a}{\sim} \beta.h$ avec $\boxed{\alpha+\beta \neq 0}$
> Alors $f + g \underset{a}{\sim} (\alpha+\beta).h$

Exemples

- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^2$

  $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -3x^2$

  $\Rightarrow \quad f(x)+g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$
- Mais par exemple, on n'a pas le droit d'additionner :

  $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^2 - x$

  $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2 + 2x$

  Il faut passer par les intermédiaires suivants :

  $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^2 - x \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^2$

  $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2 + 2x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$

  $\Rightarrow \quad f(x)+g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 5x^2$
- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^2$

  $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -2x^2$

  Ici, on ne peut pas additionner les équivalents car on a $\alpha+\beta = 0$
  On aura besoin d'un outil plus puissant : les développements limités.

Propriété 19 : Polynôme en $\pm\infty$

> Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré

Exemple : $g(x) = -3x^4 + x^3 - 7$

$x^3 - 7 = o(x^4)$ en $+\infty$ $\Rightarrow$ $-3x^4 + x^3 - 7 \underset{x\to+\infty}{\sim} -3x^4$

Propriété 20 : Polynôme en 0

> Un polynôme est équivalent en 0 à son terme non nul de plus petit degré

Exemple : $g(x) = -3x^4 + x^3 - 7x^2$

$-3x^4 + x^3 = o(x^2)$ en 0 $\Rightarrow$ $g(x) = -3x^4 + x^3 - 7x^2 \underset{x\to0}{\sim} -7x^2$

5.4 Fouzitou

Propriété 21 : Relation d'équivalence

> - $\forall f,\ f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité)
> - $\forall f, g,\ f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie)
> - $\forall f, g, h,\ [f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h] \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité)

Propriété 22 : transitivités

> $f = o(g)$ et $g = o(h) \quad \Rightarrow \quad f = o(h)$
> $f = o(g)$ et $g \sim h \quad \Rightarrow \quad f = o(h)$
> $f \sim g$ et $g = o(h) \quad \Rightarrow \quad f = o(h)$

Propriété 23 : mélange

> $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = o(g) \iff f - g = o(f)$

Propriété 24 : Formule de Stirling

> $$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad (= \sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-n})$$

Déterminer un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$ en $+\infty$