1 préliminaires

1.1 Remarques

On étudie le cas des suites définies par une relation de récurrence du type :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction fixée.

Exemple

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \quad$ et $\quad u_0 > 0$
  Dans ce cas, la fonction f est définie par : $\forall x \geq 0, \quad f(x) = \sqrt{x+1}$
- Par contre une suite définie par :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{n+1}} \quad \text{n'est pas de ce type.}$$
  En effet, u_{n+1} ne dépend pas que de la valeur u_n précédente, mais aussi du rang n de ce terme.

Attention : Ne confondez pas les suites définies par $\quad u_n = f(n) \quad$ et celles par $u_{n+1} = f(u_n)$

Convergence

Avant de parler de la limite d'une suite, il faut impérativement justifier la convergence de cette suite. Sinon cela n'a aucun sens (vous parleriez de quelque chose dont vous ne connaîtriez même pas l'existence !)

2 Schéma d'étude général des suites recurrentes

1) Préambule : étude de la fonction f
   Il est souvent (presque toujours) nécessaire de connaître
   - F 1) Les variations de la fonction f.
   - F 2) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq x$ (voir § 4)
   - F 3) Les solutions de l'équation $f(x) = x$ (ce sont les points fixes de f),
2) Etude de la suite u
   - S 1) Le bon intervalle
     On montre que la suite u est « bien définie » et qu'elle prend ses valeurs dans un intervalle I à déterminer
     Pour cela on fait la récurrence « paquet-cadeau » :
     Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe ET $u_n \in I$
     En général , le bon intervalle a pour bornes des points fixes et/ou $\pm\infty$
   - S 2) Étude de la monotonie de u
     - a) Ou bien on utilise que f est croissante sur I et donc on peut montrer que (u_n) est monotone :
       Démonstration par récurrence que
       $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$)
     - b) ou bien on a $\quad \forall x \in I, f(x) \leq x \quad$ ou $\quad \forall x \in I, f(x) \geq x$
   - S 3) Étude la convergence de u
     - a) 1er cas : u est (croissante et majorée) ou (décroissante et minorée),
       et donc elle converge
       Ensuite on détermine la limite ℓ par le point fixe : $\quad f(\ell) = \ell$
     - b) 2ème cas : sinon !
       Il faut montrer que u tend vers $\pm\infty$
       Raisonnement par l'absurde : on suppose que u converge vers ℓ
       Et donc $\quad f(\ell) = \ell$
       Et on obtient une contradiction

3 Et si la fonction f n'est pas croissante ?

On étudie les sous-suites $\ (v_n) = (u_{2n})\ $ et $\ (w_n) = (u_{2n+1})\ $ à l'aide de la fonction $\ g = f \circ f$.
En général, dans ce cas g est croissante sur un « bon intervalle » I.
Et donc les suites (v_n) et (w_n) sont monotones.
Remarque : il suffit d'étudier UNE des deux suites v ou w, les propriétés de la seconde se déduisent alors de celle de la première.

4 Points fixes

On cherche les points tels que $\quad f(x) = x$

1) 1ère méthode : on résout directement l'équation « à la main ».
2) 2ème méthode : on prouve l'existence de points fixes (sans nécessairement connaître leur valeur exacte :
   Pour cela on étudie la fonction auxiliaire g définie par $\quad g(x) = f(x) - x \quad$ et on montre l'existence de racines en étudiant ses variations et en utilisant le théorème de la bijection.

   Exemple : points fixes avec $\quad f(x) = \mathrm{e}^x - 2$