1 Suites

1.1 Définitions

Définition 1

Une suite u à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$; ou $[\![p, +\infty[\![$ avec $p \in \mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

On note u_n le terme de rang n de la suite u

et la suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou bien $(u_n)_{n\geq p}$ ou encore (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté.)

Attention : la suite est <u>définie</u> sur $\mathbb{N}$ et <u>à valeurs</u> dans $\mathbb{R}$ ou bien encore : à termes réels)

Définition 2 : Opérations sur les suites

Soit u et v deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$
On note $u + v$, $u.v$, $a.u$ les suites définies respectivement par :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u + v)_n = u_n + v_n \quad (u.v)_n = u_n.v_n \quad (a.u)_n = a.u_n$

Définition 3 : vocabulaire

Une suite u est dite

- croissante (resp. strictement croissante) si :
  $\forall(n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad n \leq p \quad \Rightarrow \quad u_n \leq u_p$
  resp. $\forall(n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad n < p \quad \Rightarrow \quad u_n < u_p$
- décroissante si : $\forall(n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad n \leq p \quad \Rightarrow \quad u_n \leq u_p$
- monotone si elle est croissante ou décroissante
- stationnaire si : $\exists p \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \quad \Rightarrow \quad u_n = u_p$

Définition 4 : vocabulaire

- majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$
- minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n$
- bornée si : elle est minorée et majorée.

1.2 Propriétés élémentaires

Propriété 1 : suites monotones

- une suite u est croissante $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$
- une suite u est décroissante $\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$

Propriété 2 : suite croissante positive

Une suite u à termes **strictement positifs** est croissante ssi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

Propriété 3

Une suite croissante est minorée (par son premier terme).
Une suite décroissante est majorée (par son premier terme)

Propriété 4

Une suite stationnaire est bornée.

Propriété 5 : suite bornée

La suite u est bornée
$\iff \quad \exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M$
$\iff \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq A$
$\iff \quad$ la suite $|u|$ est majorée

<u>Démonstration</u> Montrons que u bornée $\iff$ $|u|$ majorée

$\Rightarrow$ Supposons u bornée :
Par définition de minorée et majorée
$\exists(m,\ M) \in \mathbb{R}^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$,
$m \leq u_n \leq M$

$\Rightarrow \quad -M \leq -u_n \leq -m$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} u_n \leq M \leq \max(M,\ -m) \\ -u_n \leq -m \leq \max(M,\ -m) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad |u_n| = \max(u_n,\ -u_n) \leq \max(M,\ -m)$

Donc $|u|$ est majorée

$\Leftarrow$ Supposons $|u|$ majorée
$\exists A \in \mathbb{R}+, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq A$
$\Rightarrow \quad -A \leq u_n \leq A$
Donc u est bornée

Propriété 6

Soient u, v deux suites bornées et a un réel.
Alors les suites $u + v,\ a.u,\ u.v$ sont également bornées

<u>Démonstration</u>

Supposons u et v sont bornées.

Donc il existe M_1 et M_2 tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \le M_1 \quad \text{et} \quad |v_n| \le M_2.$
D'où : $|a.u_n| \le |a|.M_1$
$a.u$ est donc bornée

$$|(u+v)_n| = |u_n + v_n| \le |u_n| + |v_n| \le M_1 + M_2$$

$u+v$ est donc bornée.

$$|(u.v)_n| = |u_n.v_n| = |u_n||v_n| \le M_1 M_2$$

$u.v$ est donc bornée.

2 Limites de suites

2.1 Définitions

Définition 5 : Limite nulle

Soient u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$
On dit que la suite u admet la limite 0 (quand n tend vers $+\infty$) si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \ge p \quad \Rightarrow \quad |u_n| \le \varepsilon$$
ou encore :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \ge p \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon \le u_n \le +\varepsilon$$
On note alors $\quad u_n \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$

Définition 6 : Limite finie

Soient u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$
On dit que la suite u admet la limite ℓ (quand n tend vers $+\infty$) si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \ge p \quad \Rightarrow \quad |u_n - \ell| \le \varepsilon$$
ou encore :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \ge p \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon \le u_n \le \ell + \varepsilon$$
On dit dans ce cas que la suite u est **convergente** et on note :
$$u_n \to \ell \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

Définition 7 : suite divergente

Une suite n'admettant aucune limite finie est ditedivergente.

Propriété 7

$u_n \to \ell \quad \iff \quad u_n - \ell \to 0 \quad \iff \quad |u_n - \ell| \to 0$
En particulier, $\quad u_n \to 0 \quad \iff \quad |u_n| \to 0$

Démonstration Il suffit d'écrire la définition !

Définition 8 : Limite infinie

Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \ge p \quad \Rightarrow \quad u_n \ge A$$
on note $\quad u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty \quad$ ou $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \ge p \quad \Rightarrow \quad u_n \le A$$
on note $\quad u_n \to -\infty$ quand $n \to +\infty \quad$ ou $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Remarque : Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.
Mais une suite divergente ne tend pas nécessairement vers $+\infty$ ou $-\infty$

2.2 Exemples

1) $\boxed{u_n = 1/n \to 0}$

- Heuristique : on veut $\quad |u_n| \le \varepsilon$
Or $\quad |u_n| \le \varepsilon$
$\iff \quad 1/n \le \varepsilon \quad$ car $1/n > 0$
$\iff \quad n \ge 1/\varepsilon \quad$ car tout est positif
Ce qui marche pour $\quad n \ge \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$
- Synthèse :
Soit $\varepsilon > 0$
Prenons $\quad p = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$
Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\quad n \ge p$
$n \ge p \quad \Rightarrow \quad n \ge 1/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |u_n| \le \varepsilon \quad$ CQFD

2) $\boxed{u_n = n/2 \to +\infty}$

Soit $A \in \mathbb{R}$

- Heuristique : On veut $\quad u_n = n/2 \ge A$
Il suffit donc d'avoir $\quad n \ge 2A$
et donc $\quad n \ge \lfloor 2A \rfloor + 1 \quad$ suffit
- Synthèse :
Prenons $\quad p = \max(\lfloor 2A \rfloor + 1,\ 0)$
On a $\quad p \in \mathbb{N}$
Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\quad n \ge p$

$$n \geq \lfloor 2A \rfloor + 1 \quad \Rightarrow \quad n \geq 2A \quad \Rightarrow \quad u_n \geq A \quad \text{CQFD}$$

3) $\boxed{u_n = 1/(n-1) \quad \text{pour } n \geq 2}$

$1/(n-1) < \varepsilon \iff n-1 > 1/\varepsilon$ car tout est positif

$\iff n > 1/\varepsilon + 1$

Soit $\varepsilon > 0$

Prenons $p = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 2 \geq 2$ car $1/\varepsilon > 0$

Soit $n \geq p$

$n \geq \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 2 > (1/\varepsilon - 1) + 2 = 1/\varepsilon + 1$

$\Rightarrow n - 1 > 1/\varepsilon > 0$

$\Rightarrow 0 < 1/(n-1) < \varepsilon$ car tout est positif

$\Rightarrow |u_n| < \varepsilon$

2.3 Propriétés élémentaires

Définition 9 : « à partir d'un certain rang »

> Soit (u_n) une suite réelle.
> Une propriété $\mathcal{P}$ portant sur u_n est vraie« à partir d'un certain rang » si et seulement si
> $$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow \mathcal{P}(u_n)$$

Exemple : la suite u définie par $u_n = n^2 - 6n$ est positive à partir d'un certain rang

c'est-à-dire $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow u_n \geq 0$

En effet, prenons $p = 6$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $n \geq p$

Alors $\geq 6 \quad \Rightarrow \quad u_n = n^2 - 6n = n(n-6) \geq 0$

Lemme : conservation de l'ordre

> Soient u et v deux suites convergentes telles que
> $u \leq v$ à partir d'un certain rang
>
> Et telles que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ quand $n \to +\infty$
>
> Alors $\ell \leq \ell'$

Démonstration Soient donc deux suites u et v telles que

- $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ quand $n \to +\infty$
- Et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang p_0

Par l'absurde : supposons $\ell' < \ell$

Posons $\varepsilon = (\ell - \ell')/3$

On a donc trivialement $\ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon$

$u_n \to \ell$ donc il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq p_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

$v_n \to \ell'$ donc il existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$n \geq p_2 \Rightarrow \ell' - \varepsilon \leq v_n \leq \ell' + \varepsilon$

Soit $p = \max(p_0,\ p_1,\ p_2)$

$p \geq p_1 \Rightarrow v_p \leq \ell' + \varepsilon$

Or $\ell' + \varepsilon < \ell - \varepsilon$

et $p \geq p_2 \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_p$

Donc $v_p < u_p$

Or $p \geq p_0 \Rightarrow u_p \leq v_p$

Il y a donc contradiction.

D'où $\ell \leq \ell'$ Quid est demonstratum

Propriété 8 : Unicité de la limite

> Si u converge, alors sa limite est unique
> On pourra donc écrire, quand la suite (u_n) converge : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Démonstration Soient ℓ et ℓ' telles que $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$

Or, en posant $v_n = u_n$ on a $v_n \to \ell'$ avec $u_n \leq v_n$

Donc d'après le lemme on a : $\ell \leq \ell'$

En échangeant u et v on obtient de même : $\ell' \leq \ell$

Et donc $\ell = \ell'$

Ce qui prouve l'unicité de la limite

Propriété 9 : conservation de l'ordre

> Soient u et v deux suites convergentes telles que
> $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang
>
> Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
>
> En particulier,
> si u converge et a et b sont deux réels tels que : $a \leq u \leq b$
>
> Alors $a \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq b$

ATTENTION : Ça marche avec les inégalités larges, non avec les inégalités strictes

Si $a < u_n < b$ alors $a \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq b$

(Le passage à la limite élargit les inégalités)

Démonstration C'est la conséquence immédiate du lemme précédent, et la limite étant unique, on peut remplacer $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$

par $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$

Propriété 10 : Suites convergentes monotones

> Soit u une suite croissante (resp. décroissante) convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.
>
> Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$ resp. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ell$

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$,
u est croissante donc pour $p \geq n$, on a $u_p \geq u_n$
Et donc $\lim\limits_{p\to\infty} u_p \geq u_n \quad \Rightarrow \quad \ell \geq u_n$

Propriété 11

> Toute suite convergente est bornée

Démonstration Soit ℓ la limite de u. Prenons par exemple $\varepsilon = 1$ (On pourrait prendre n'importe quelle valeur strictement positive)
Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \quad \Rightarrow \quad \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$

$\{u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{p-1},\ \ell - 1\}$ est un ensemble FINI de valeurs donc il possède un plus petit et un plus grand élément

Posons donc $m = \min(u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{p-1},\ \ell - 1)$

et $M = \max(u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{p-1},\ \ell + 1)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n \leq M$ CQFD

2.4 Opérations sur les suites convergentes

Lemme

> Soit u et v deux suites tendant vers 0
> Alors $u + v$ tend aussi vers 0

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$
Il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p_1 \quad \Rightarrow \quad |u_n| \leq \varepsilon/2$
Il existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p_2 \quad \Rightarrow \quad |v_n| \leq \varepsilon/2$
Posons $p = \max(p_1, p_2)$
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$
$\Rightarrow \quad n \geq p_1$ et $n \geq p_2$
Alors $|u_n| \leq \varepsilon/2$ et $|v_n| \leq \varepsilon/2$
$\Rightarrow \quad |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
Donc on a trouvé $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow |(u+v)_n| \leq \varepsilon$
Donc $u + v$ converge vers 0.

Lemme

> Soit u une suite tendant vers 0 et v une suite bornée
> Alors la suite $u.v$ tend vers 0

Démonstration La suite v est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq M$
Soit $\varepsilon > 0$
Il existe p tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon/M$
D'où $|(u.v)_n| = |u_n|.|v_n| \leq (\varepsilon/M).M = \varepsilon$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow |(u.v)_n| < \varepsilon$
Donc uv converge vers 0.

Propriété 12

> Soit u et v deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' et soit $a \in \mathbb{R}$
> Alors les suites $u + v, \quad a.u, \quad u.v$ convergent respectivement vers : $\ell + \ell', \quad a.\ell, \quad \ell.\ell'$

Démonstration $u_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad (u_n - \ell) \to 0$
$v_n \to \ell' \quad \Rightarrow \quad (v_n - \ell') \to 0$

- $\Rightarrow \quad (u_n - \ell) + (v_n - \ell') \to 0$
  $\Rightarrow \quad (u_n + v_n) - (\ell + \ell')) \to 0$
  $\Rightarrow \quad (u + v)_n \to \ell + \ell'$
- $(u_n - \ell) \to 0 \quad \Rightarrow \quad a.(u_n - \ell) \to 0$
  $\Rightarrow \quad a.u_n - a.\ell \to 0$
  $\Rightarrow \quad (a.u)_n \to a.\ell$
- $u_n.v_n - \ell.\ell' = (u_n - \ell + \ell).v_n - \ell.\ell' = (u_n - \ell)\ell' + \ell.v_n - \ell.\ell'$
  $= (u_n - \ell)\ell' + \ell.(v_n - \ell')$

  $u_n - \ell \to 0$
  Et $v_n \to \ell$ donc (v) est bornée
  Donc $(u_n - \ell).v_n \to 0$

  D'autre part $(v_n - \ell') \to 0 \quad \Rightarrow \quad \ell.(v_n - \ell') \to 0$
  D'où : $(u_n - \ell).v_n + \ell.(v_n - \ell') \to 0$
  $\Rightarrow \quad (u.v)_n - \ell.\ell' \to 0$
  $\Rightarrow \quad (u.v)_n \to \ell.\ell'$

Propriété 13

Soit u une suite convergeant vers ℓ
Alors $|u|$ converge vers $|\ell|$

<u>Attention</u> : la réciproque est fausse !
Par exemple $u_n = (-1)^n$ et $|u_n| = 1$
$|u|$ converge et u diverge

<u>Démonstration</u> Soit $\varepsilon > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

(Il faut montrer que $\big||u_n - |\ell|\big| \leq \varepsilon$ pour n assez grand)

Or, d'après l'inégalité triangulaire $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

Donc $\big||u_n| - |-\ell|\big| \leq |u_n + (-\ell)|$

$\iff$ $\big||u_n| - |\ell|\big| \leq |u_n - \ell|$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \big||u_n| - |\ell|\big| < \varepsilon$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$

Propriété 14

Soit u une suite convergeant vers une limite $\ell > 0$
Alors la suite (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.
(Cad : $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow u_n > 0$)

<u>Démonstration</u> Posons $\varepsilon = \ell/2 > 0$
$\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$
Or, $\ell - \varepsilon = \ell/2 > 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow 0 < \ell - \varepsilon < u_n$ CQFD.

Propriété 15

Soit u une suite convergeant vers ℓ avec $\ell \neq 0$.
Alors la suite $1/u = (1/u_n)$ est définie à partir d'un certain rang et elle converge vers $1/\ell$.

<u>Démonstration</u> On va se placer dans le cas où $\ell > 0$ (Pour $\ell < 0$, il suffirait d'étudier la suite $(-u_n)$)

- D'après ce qui précède, pour n assez grand, on a : $u_n > 0$
  donc : $u_n \neq 0$
  $(1/u_n)$ est donc défini pour n assez grand.
- $$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{\ell.u_n} = (1 - \frac{u_n}{\ell})\frac{1}{u_n}$$
  $u_n \to \ell > 0 \Rightarrow u_n - \ell/2 \to \ell/2 > 0$
  Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $u_n - \ell/2 > 0$
  $\Rightarrow u_n > \ell/2 > 0$
  $\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{2}{\ell}$ (car tout est positif)
  La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est donc bornée à partir du rang p
  Et comme $u_n \to \ell \Rightarrow (1 - \dfrac{u_n}{\ell}) \to 0$
  La suite $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell} = (1 - \dfrac{u_n}{\ell})\dfrac{1}{u_n} \to 0$
  Donc $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$

Propriété 16

Soient u et v deux suites convergeant vers respectivement ℓ et ℓ' avec $\ell' \neq 0$.
Alors la suite $u/v = (u_n/v_n)$ est définie à partir d'un certain rang et elle converge vers ℓ/ℓ'.

<u>Démonstration</u> La suite $(1/v_n)$ est définie à partir d'un certain rang donc la suite (u_n/v_n) l'est aussi.
$v_n \to \ell' \Rightarrow 1/v_n \to 1/\ell'$.
De plus $u_n \to \ell$
Donc : $u_n/v_n = u_n.(1/v_n) \to \ell.(1/\ell') = \ell/\ell$'

3 Principaux théorèmes de convergence

3.1 suites monotones

Propriété 17 : Suites monotones

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M (resp. décroissante et minorée par m),

alors (u_n) converge vers une limite (inconnue)ℓ telle que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq M$

resp : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq \ell \leq u_n$

ATTENTION : Si une suite croissante est majorée par M, cela ne signifie absolument pas que la limite de cette suite est M.
Ce théorème donne seulement la convergence d'une suite, et non sa limite
.

Propriété 18

> Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante), alors la suite u admet une limite (finie ou infinie)
>
> Plus précisément
> Une suite croissante u converge si elle est majorée
> Sinon elle diverge vers $+\infty$

Démonstration Soit u une suite croissante
Si elle est majorée, elle admet une limite finie (elle est convergente)
Supposons qu'elle ne soit pas majorée.
Or u majorée $\iff$ $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le M$
Donc u non majorée $\iff$ $\forall M\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N},\ u_n>M.$
Soit $A\in\mathbb{R}$
Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n>A$
Donc $\forall p\ge n\quad u_p\ge u_n$ car u est croissante
$\Rightarrow\quad u_p\ge A$
D'où : $\forall A\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N},\quad p\ge n\quad\Rightarrow\quad u_p\ge M.$
Donc $(u_n)\to+\infty$ CQFD

3.2 Encadrement

Propriété 19 : Théorème de l'encadrement

> Soient $u,\ v,\ w$ trois suites telles que
> - $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\le v_n\le w_n$
> - u et w convergent vers une même limite ℓ
>
> alors v converge aussi vers cette même limite ℓ .

Démonstration Soit $\varepsilon>0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$ Donc

Il existe $p_1\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge p_1,\quad \ell-\varepsilon\le u_n\le\ell+\varepsilon$

Il existe $p_2\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge p_2\quad \ell-\varepsilon\le w_n\le\ell+\varepsilon$

Posons $p=\max(p_1,\ p_2)$

Soit $n\ge p$ Donc $n\ge p_1$ et $n\ge p_2$

$\Rightarrow\quad \ell-\varepsilon\le u_n\le\ell+\varepsilon$ et $\ell-\varepsilon\le w_n\le\ell+\varepsilon$

$\Rightarrow\quad \ell-\varepsilon\le u_n$ et $w_n\le\ell+\varepsilon$

Or $u_n\le v_n\le w_n$

$\Rightarrow\quad \ell-\varepsilon\le u_n\le v_n\le w_n\le\ell+\varepsilon$

$\Rightarrow\quad \ell-\varepsilon\le v_n\le\ell+\varepsilon$

Donc : $\forall\varepsilon>0,\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\ge p,\quad \ell-\varepsilon\le v_n\le\ell+\varepsilon$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$ CQFD.

Propriété 20 : Comparaison et limites infinies

> Soit u et v deux suites telles que : $u_n\le v_n$ à partir d'un certain rang
> - Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$
> - Si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$

Démonstration Soit $A\in\mathbb{R}$,

Il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge p,\quad u_n\ge A$

Or $v_n\ge u_n\quad\Rightarrow\quad v_n\ge A$

Donc $n\ge p\quad\Rightarrow\quad v_n\ge A.$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

On procède de même pour le cas $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$

3.3 suites adjacentes

Définition 10 : Suites adjacentes

> Soient $u,\ v$ deux suites telles que
> - l'une est croissante
> - l'autre est décroissante.
> - $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-u_n=0$
>
> alors u et v sont dites adjacentes

Propriété 21 : Théorème des suites adjacentes

> Soient $u,\ v$ deux suites adjacentes (avec u croissante)
> alors u et v convergent vers une même limite (inconnue) ℓ
> telle que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\le\ell\le v_n$

Démonstration Soient u, v deux suites adjacentes, c'est-à-dire u croissante, v décroissante et $u - v \to 0$

- Posons $w = v - u$

  u est croissante donc $-u$ est décroissante. De plus v est décroissante donc w est une suite décroissante qui converge vers 0.

  Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geq \lim w_n \quad \Rightarrow \quad w_n \geq 0$

  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$

- u est croissante donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leq u_n$

  D'où : $u_0 \leq u_n \leq v_n$
  v est donc une suite décroissante et minorée par u_0.

  v converge donc vers une limite ℓ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell \leq v_n \leq v_0$

- D'autre part, $u_n = v_n - (v_n - u_n) = v_n - w_n$

  v et w convergent vers ℓ et 0

  Donc u converge également vers ℓ

  Et comme u est croissante on a $u_0 \leq u_n \leq \ell$

- On a donc bien u et v convergentes vers une même limite ℓ

  et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_n \leq v_0$.

Propriété 22 : sous-suites paires et impaires

> la suite u admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si
> les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite ℓ

Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n + 3n}{(-1)^{n+1} + 2n}$

$v_n = u_{2n} = \dfrac{1+6n}{-1+4n} \sim \dfrac{6n}{4n} = 3/2 \quad w_n = u_{2n+1} = \dfrac{-1+6n+3}{1+4n+2} \sim 3/2$

$\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = 3/2$ donc (u_n) converge et $\lim u_n = 3/2$

Démonstration

$\Rightarrow$ On va se limiter ici au cas de la convergence.
Supposons $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$
Soit $\varepsilon > 0$
Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \quad \Rightarrow \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$
Or $2n \geq n$ et $2n+1 \geq n$
Donc pour $n \geq p$, on a $2n \geq p$ et $2n+1 \geq p$

$\Rightarrow \quad |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$

Donc, on a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$

$\Leftarrow$ Supposons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers $\ell = -\infty$ (pour changer)

Soit $A < 0$. (Il faut prouver que $u_n \leq A$ pour n assez grand)
La suite $v_n = u_{2n}$ tend vers $-\infty$

Donc il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p_1,\ v_n = u_{2n} \leq A$

La suite $w_n = u_{2n+1}$ tend vers $-\infty$

Donc il existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p_2,\ w_n = u_{2n+1} \leq A$

Posons $p = \max(2p_1, 2p_2 + 1)$
Soit $n \geq p$

- Si n est pair, alors $n = 2k$ avec $n \geq 2p_1$
  $\Rightarrow k \geq p_1 \Rightarrow u_n = u_{2k} \leq A$
- Si n est impair, alors $n = 2k+1$ avec $n \geq 2p_2 + 1$
  $\Rightarrow k \geq p_2 \Rightarrow u_n = u_{2k+1} \leq A$
- Dans tous les cas , $n \geq p \quad \Rightarrow \quad u_n \leq A$

On a donc bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Propriété 23 : sous-suites paires et impaires (bis)

> Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) n'admettent pas la même limite ℓ
> Alors la suite u n'admet pas de limite

$\boxed{\text{Exemple : } u_n = (-1)^n}$ $u_{2n} = 1 \quad u_{2n+1} = -1$ Les deux sous-suites convergent vers deux limites distinctes donc la suite (u_n) n'admet pas de limite.

4 suites et fonctions

4.1 fonctions continues

Propriété 24 : Suites et applications continues

> Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un ensemble I et $f : I \to \mathbb{R}$ une application telles que :
> - la suite u converge vers $a \in I$
> - f est continue en a.
>
> alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$

Propriété 25 : Suites récurrentes et point fixe

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
- la suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
- f est continue en ℓ

alors ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire : $f(\ell) = \ell$

4.2 Rappels sur les fonctions continues

Propriété 26 : Théorème de la bijection

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.
Pour tous $(a,b) \in I^2$
Si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$
Alors il existe un unique $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$

Cela signifie en fait que $f(I)$ est un intervalle et que f réalise une bijection de I sur $f(I)$

Exemple : Déterminer l'existence des points fixes de f avec $f(x) = \mathrm{e}^x - 2$

On cherche x tel que $f(x) = x$ Posons $g(x) = f(x) - x$
On a $f(x) = x \iff g(x) = 0$
Étudions les variations de g : $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \geq 0 \iff x \geq 0$
Limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ $f(0) = -1$

On obtient le TV suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- sur $I =]-\infty, 0]$

< < < Rédaction à connaître parfaitement > > >

g est continue et strictement décroissante
Donc g établit une bijection de $I =]-\infty, 0]$ sur $g(I) = [-1, +\infty[$
Or $0 \in g(I)$
Donc il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 0]$ tel que $g(\alpha) = 0$

- sur $J = [0, +\infty[$

De même g établit une bijection de $J = [0, +\infty[$ sur $g(J) = [-1, +\infty[$
Or $0 \in g(J)$

Donc il existe un unique $\beta \in [0,\ +\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$

- Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ et donc aussi $f(x) = x$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$ telles que $\alpha < 0 < \beta$
(Remarque : trivialement 0 ne peut être solution puisque $g(0) = -1$)

5 Suites à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 11 : Convergence

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On dit que la suite (z_n) admet la limite $\ell \in \mathbb{C}$ (quand n tend vers $+\infty$) ssi :

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \quad \Rightarrow \quad |z_n - \ell| < \varepsilon$$

Définition 12

Une suite n'admettant aucune limite finie est dite divergente.

Propriété 27 : Limite nulle

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \ell \quad \iff \quad \lim_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$$

Remarque : L'avantage de cette propriété est qu'on se ramène à une suite réelle : $(\ |z_n - \ell|\ )$

Exemple : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) = \dfrac{1}{1-a}$

Propriété 28

Soit (z_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \ell \quad \iff \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(\ell) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Propriété 29 : Convergence par majoration

Soient (z_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $\ell \in \mathbb{C}$ tels que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n - \ell| \leq u_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Alors la suite (z_n) converge vers ℓ.

Remarque : pour montrer qu'une suite (z_n) converge vers ℓ, il existe donc deux méthode principales :

- ou bien on montre que $\begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$
- ou bien on montre que $\quad |z_n - \ell| \to 0$

Dans les deux cas, cela se ramène à étudier des suites réelles.

Définition 13 : Suite bornée

La suite (z_n) à valeurs complexes est dite bornée

$\iff$ la suite $(|z_n|)$ à valeurs réelles est bornée

$\iff$ $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| \leq M$

Propriété 30 : Suite bornée

La suite (z_n) à valeurs complexes est bornée si et seulement si

les suites réelles $(\mathrm{Im}(z_n))$ et $(\mathrm{Re}(z_n))$ sont bornées

Propriété 31 : Suite convergente

Toute suite (z_n) à valeurs complexes convergente est bornée

Définition 14 : notation

- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté $\quad \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

6 Suites usuelles

6.1 Suite arithmético-géométrique

Définition 15

Une suite u est arithmético-géométrique si et seulement si il existe $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q.u_n + r$

.

Remarque

- Si $r = 0, \quad u$ est géométrique
- Si $q = 1, \quad u$ est arithmétique

Méthode

Plaçons-nous dans le cas $q \neq 1$.

Posons $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \ell = q.\ell + r \quad (\iff \quad \ell = \dfrac{r}{1-q})$

ℓ est appelé le **point fixe** de u (si $\quad u_0 = \ell, \quad$ alors la suite u est constante.)

On a : $\begin{cases} u_{n+1} &= q.u_n &+r \\ \ell &= q.\ell &+r \end{cases}$

En soustrayant, on obtient : $\quad u_{n+1} - \ell = q.(u_n - \ell)$

La suite $\quad (u_n - \ell) \quad$ est donc géométrique de raison q.

D'où : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \ell = q^n(u_0 - \ell)$

Et donc $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ell + q^n(u_0 - \ell)$

Conséquence : Qd $q \neq 1$, u converge si et seulement si $\quad u_0 = \ell \quad$ ou $\quad |q| < 1$.

6.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 16 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants (ouf !) si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation $\quad r^2 - ar - b = 0 \quad$ est appelée équation caractéristique de la suite. Son discriminant est $\quad \Delta = a^2 + 4b$

Propriété 32 : solution dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad$ **(E)**

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1, r_2 les suites solutions de **(E)** sont de la forme

$$u_n = \lambda.{r_1}^n + \mu.{r_2}^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \textbf{(S)}$$

- Si l'équation caractéristique admet une solution double r_0, les suites solutions de **(E)** sont de la forme

$$u_n = (\lambda + \mu.n){r_0}^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \textbf{(S)}$$

Propriété 33 : Solution dans $\mathbb{R}$

- $\Delta > 0$: deux solutions réelles distinctes r_1, r_2
  Les suites solutions sont de la forme
  $$u_n = \lambda . {r_1}^n + \mu . {r_2}^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
- $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\quad r_1 = \rho.\mathrm{e}^{+\mathbf{i}.\omega}, \quad r_2 = \overline{r_1} = \rho.\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\omega}$
  Les suites solutions sont de la forme
  $$u_n = \rho^n (A.\cos(\omega.n) + B.\sin(\omega.n)) \quad \text{avec} \quad (A,\ B) \in \mathbb{R}^2$$
- $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet solution double $r_0 \in \mathbb{R}$
  Les suites solutions sont de la forme
  $$u_n = (\lambda + \mu.n){r_0}^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque : Dans le cas $\quad \Delta < 0 \quad$ et $\quad r_1 = \rho.\mathrm{e}^{+\mathbf{i}.\omega},\ r_2 = \rho.\mathrm{e}^{-\mathbf{i}.\omega} = \overline{r_1}$

Les suites $\quad (r_1^n) = (\rho^n \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\omega}) \quad$ et $\quad (r_2^n) = (\rho^n \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\omega}) \quad$ sont solutions de l'équ. **(E)**

Donc les suites définies par
$$\frac{1}{2}(r_1^n + r_2^n) = \frac{1}{2}(\rho^n \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\omega} + \rho^n \mathrm{e}^{-\mathbf{i}n\omega}) = \mathrm{Re}\big(\rho^n \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\omega}\big) = \rho^n \cos(n\omega)$$
et $\quad \dfrac{1}{2\mathbf{i}}(r_1^n - r_2^n) = \mathrm{Im}(\rho^n \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\omega}) = \rho^n \sin(n\omega)$

sont aussi solution de **(E)**
On retrouve donc les deux solutions de base de **(S)**

6.3 suites arithmétiques

Définition 17 : Suite arithmétique

La suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Propriété 34

u est une suite arithmétique de raison r
$\iff \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété 35 : Somme de premiers termes

Soit u une suite arithmétique de raison r
Alors, pour $\quad p \leq n$: $\quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$

(nbre de termes) $\times$ (moyenne des extrêmes)

6.4 Suites géométriques

Définition 18 : Suite géométrique

la suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q.u_n$$

Propriété 36

u est une suite arithmétique de raison r
$\iff \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = q^{n-p} u_p$

Propriété 37 : Convergence

- Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1
- Si $|q| < 1$, la suite (q^n) converge vers 0
- Si $q > 1$, la suite (q^n) tend vers $+\infty$
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'admet aucune limite finie ou infinie.

Propriété 38 : Somme de premiers termes

Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0.
$$\text{Alors :} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases} u_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = \dfrac{u_p - u_{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-p+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Propriété 39 : Somme de premiers termes (conséquence)

Soit $\quad q \neq 0$
$$\text{Alors :} \quad \sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} q^p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = \dfrac{q^p - q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-p+1) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Propriété 40 : Convergence de la somme

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.
Alors (S_n) la somme des premiers termes de u converge si et seulement si $|q| < 1$
$$\text{Alors} \quad \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{1-q} u_0$$