# 1 Généralités

## 1.1 Propriétés et transformations graphiques

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie sur $D_f$ de graphique $C_f$. On définit les fonctions suivantes :

a) $\forall x \in D_f,\ g(x) = -f(x)$

$C_g$ est l'image de $C_f$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $(-x) \in D_f,\ g(x) = f(-x)$

$C_g$ est l'image de $C_f$ par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

c) Soit $a \in \mathbb{R},\quad \forall x \in D_f,\ g(x) = f(x) + a$

$C_g$ est l'image de $C_f$ par la translation verticale de vecteur $2\vec{j}$

d) Soit $a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $x + a \in D_f,\ g(x) = f(x + a)$

$C_g$ est l'image de $C_f$ par la translation horizontale de vecteur $-2\vec{i}$

e) Soit $a \in \mathbb{R},\quad \forall x \in D_f,\ g(x) = a.f(x)$

$C_g$ est l'image de $C_f$ par la dilatation verticale de rapport $a$

f) Soit $a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $a.x \in D_f,\ g(x) = f(a.x)$

$C_g$ est l'image de $C_f$ par la dilatation horizontale de rapport $1/a$

**Définition 1 : Fonction paire**

Une fonction $f$ est **paire** sur un ensemble $E$ si et seulement si
- $E$ est centré (c'est-à-dire $\forall x \in E, -x \in E$)
- $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

Dans ce cas $C_f$, le graphique $f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(Oy)$

**Définition 2 : Fonction impaire**

Une fonction $f$ est **impaire** sur un ensemble $E$ si et seulement si
- $E$ est centré (c'est-à-dire $\forall x \in E, -x \in E$)
- $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$

Dans ce cas $C_f$, le graphique $f$ est symétrique par rapport au centre $O$

**Définition 3 : Fonction périodique**

Soit $f$ définie sur un ensemble $E$ $f$ est de période $T \in \mathbb{R}$ si et seulement si
- $\forall x \in E, x + T \in E$
- $\forall x \in E,\ f(x + T) = f(x)$

## 1.2 Bornes

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction

**Définition 4 : Majoration**

- $f$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$ sur $A$ ssi : $\quad \forall x \in A,\ f(x) \leq M$

  $M$ est appelé un majorant de $f$ sur $A$
- $f$ est majorée sur un ensemble $A$ ssi :

  $$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \leq M$$

**Définition 5 : Minoration**

- $f$ est minorée par $m \in \mathbb{R}$ sur $A$ ssi : $\quad \forall x \in A,\ m \leq f(x)$

  $m$ est appelé un minorant de $f$ sur $A$
- $f$ est minorée sur un ensemble $A$ ssi :

  $$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq f(x)$$

**Définition 6 : Fonction bornée**

$f$ est bornée sur un ensemble $A$ si et seulement si

$f$ est majorée et minorée sur $A$

**Propriété 1 : Fonction bornée**

$$\begin{aligned} & f \text{ est bornée sur } A \\ \iff\ & \exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in A,\ |f(x)| \leq K. \\ \iff\ & |f| \text{ est majorée sur } A \end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>

- Supposons $f$ bornée

  Alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in A,\ m \leq f(x) \leq M$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le M \\ -f(x) \le -m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le \sup(M,-m) \\ -f(x) \le \sup(M,-m) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le K \\ -f(x) \le K \end{cases} \quad$ avec $\quad K = \sup(M,-m)$

$\Rightarrow \quad \sup(f(x), -f(x)) \le K$

$\Rightarrow \quad |f(x)| \le K \quad$ car $\quad |f(x)| = \sup(f(x), -f(x))$

De plus, $|f(x)| \ge 0 \quad$ donc $K \ge 0$

Il existe donc bien $K \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\quad \forall x \in A,\ |f(x)| \le K$

et $|f|$ est bien majorée

- Réciproquement : supposons qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

  $\forall x \in A, |f(x)| \le K$

  $\Rightarrow \quad -K \le f(x) \le K \quad f$ est bien bornée CQFD

**Définition 7 : Maximum, minimum**

- $f$ admet un maximum global en $x_0 \in A$ ssi

  $\forall x \in A,\ f(x) \le f(x_0)$

  Le maximum de $f$ est donc $f(x_0)$ et il est atteint en $x_0$

  On note $\quad f(x_0) = \max\limits_{x\in A} f(x) = \max\limits_{A} f$
- $f$ admet un minimum global en $x_0 \in A$ ssi

  $\forall x \in A,\ f(x) \ge f(x_0)$

  On note $\quad f(x_0) = \min\limits_{x\in A} f(x) = \min\limits_{A} f$

**Remarques :**

- Si $f$ est majorée, alors elle admet une inifité de majorant. En effet, si $f$ est majorée par $M$, elle l'est aussi par $M+1, M+2$, etc.
- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto 1/x$ est minorée (par 0) mais n'admet pas de minimum
- S'il existe, le maximum global sur $A$ est unique

  Par contre il peut peut être atteint en différents points

  Exemple : $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$.
  Le maximum de $f$ est 1 et il est atteint en $0,\ 2\pi,\ 4\pi\ldots$

**Définition 8 : Monotonie**

- $f$ est croissante sur $I$

  $\iff \quad \forall (a,b) \in I^2, \quad a \le b \quad \Rightarrow \quad f(a) \le f(b)$
- $f$ est strictement croissante sur $I$

  $\iff \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y)$
- $f$ est décroissante sur $I$

  $\iff \quad \forall (a,b) \in I^2, \quad a \le b \quad \Rightarrow \quad f(a) \ge f(b)$
- $f$ est strictement décroissante sur $I$

  $\iff \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y)$
- $f$ est monotone sur $I$

  $\iff \quad f$ est croissante ou décroissante sur $I$

Exemple : la fonction $\quad x \mapsto 1/x \quad$ est-elle monotone sur $\mathbb{R}^*$ ?

Par contraposée on obtient les propriétés suivantes :

**Propriété 2 : Monotonie**

1) Si $f$ est croissante sur $I$

   Alors $\quad \forall (a,b) \in I^2, \quad f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$
2) Si $f$ est est strictement croissante sur $I$

   Alors $\quad \forall (a,b) \in I^2, \quad f(a) \le f(b) \Rightarrow a \le b$
3) Si $f$ est est strictement croissante sur $I$

   Alors $f$ est croissante sur $I$

   Donc $\quad \forall (a,b) \in I^2, \quad f(a) < f(b) \Rightarrow a < b$

**Remarques :**

- 1) et 2) sont obtenus par contraposée des défintion.
- 3) est vrai, car $f$ strcitement croissante ilique $f$ croissante (au sesn large), donc 1) s'applique aussi.
- Donc pour une fonction strcitement croissante conserve les inégalités strcites ou larges dans un sens ($a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)$) et dans l'autre sens ($f(a) \le f(b) \Rightarrow a \le b$)

Ce n'est pas le cas pour les fonction croissantes (au sens large) :

**Attention :** Si $f$ est croissante sur $I$,

Alors $f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y$ est **FAUX**

En effet, il suffit de prendre une fonction constante.

## 2 Continuité

**Définition 9 : Continuité en un point**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

$f$ est continue en $x_0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$( \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 )$

Autrement dit :

$f$ est continue en $x_0$ si et seulement si

Quand $x \to x_0$ alors $f(x) \to f(x_0)$

**Définition 10 : continuité sur un ensemble**

$f$ est continue sur I si et seulement si

$f$ est continue en tout point de $I$

**Propriété 3 : Opérations**

- Soient $f,\ g$ deux fonctions continues en $x_0 \in I$ et $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
  Alors $af + bg,\ f.g$ sont continues en $x_0$ .

  De plus, si $g(x_0) \neq 0$, alors $f/g$ est également continue en $x_0$.
- Soient $f,\ g$ deux fonctions continues sur $I$ et $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
  Alors $af + bg,\ f.g$ sont continues sur $I$.

  De plus $f/g$ est également continue en tout point $x$ de $I$ tel que $g(x) \neq 0$

**Propriété 4 : $C^0(I)$**

L'ensemble des application continues sur un intervalle $I$ est noté $C^0(I)$.

**Propriété 5 : Composée**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $f(I) \subset J$ (c'est-à-dire $\forall x \in I, f(x) \in J$)

Alors $g \circ f$ est continue sur $I$.

## 3 Théorème de la bijection

**Propriété 6 : Théorème de la bijection**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si

- $f$ est continue sur $I$
- $f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $I$.

Alors

- $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J = f(I)$
- Sa bijection réciproque $f^{-1} : J = f(I) \to I$ est continue et strictement monotone
- De plus $f^{-1}$ elle est de même monotonie que $f$, c'est-à-dire : $f^{-1}$ est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f$ est strictement croissante (resp. décroissante)

**Propriété 7 : Cas d'un intervalle ouvert**

Soit $f$ continue et strictement croissante sur un intervalle $I = ]a;b[$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Alors $f$ réalise une bijection

de $I = ]a,b[$ sur $f(I) = ] \lim\limits_{x\to a} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to b} f(x)\ [$

**Propriété 8 : Cas d'un intervalle semi-fermé**

Soit $f$ continue et strictement décroissante sur un intervalle $I = [a;b[$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Alors $f$ réalise une bijection

de $I = [a;b[$ sur $f(I) = ]\lim\limits_{x\to b} f(x)\ ;\ f(a)\ ]$

**Remarque :** On obtiendrait des propriétés similaires en remplaçant $[a, b[$ par $]a, b]$ ou bien encore en prenant $f$ croissante.
A vous de les écrire !

**Exemples**

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
  $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
  Donc la restriction de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ (au départ) et $\mathbb{R}^+$ (à l'arrivée) :
  $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$
  est une bijection

  <u>On dira plus simplement</u>

  « $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. »

  Sa réciproque $g^{-1}$ est également une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
  On reconnaît dans $g^{-1}$ la fonction racine carrée : $x \to \sqrt{x}$

- $f$ est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
  Elle réalise donc une bijection $(h)$ de $\mathbb{R}^-$ sur $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$.
  Sa réciproque $h^{-1}$ est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^-$.

  On a en fait : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

- Question subsidiaire : déterminer $h^{-1} \circ g$ et $g \circ h^{-1}$

**Exemple 2 :** $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$
$f$ est strictement croissante et continue sur $I = [-\pi/2, \pi/2]$

Donc elle établit une bijection $g$ de $I = [-\pi/2, \pi/2]$ sur $f(I) = [-1, 1]$

Sa réciproque $g^{-1}$ est une bijection de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ qui est également continue et strictement croissante.

**Remarques :** Cette fonction réciproque $g^{-1}$ est notée arcsin.
On obtient de même les fonctions arccos et arctan qui seront étudiées prochainement

# 4 Bijection

**Définition 11 : Bijection (Rappel)**

$f : E \to F$ est une bijection si et seulement si

tout élément de $F$ admet un unique antécédent dans $E$

Ou encore

Pour tout $y \in F$, il existe un **unique** $x \in E$ tel que : $y = f(x)$

**Définition 12 : Réciproque (Rappel)**

Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors on définit sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ tel que

Pour tous $\underline{x \in E,\ y \in F}$, $\quad x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y$

A retenir

$$\boxed{\forall x \in E,\ \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x}$$

ou encore :

$$\boxed{\forall x \in F,\ \forall y \in E, \quad y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)}$$

**Remarque :** Dans toutes ces formules, ainsi que dans la suite, il est essentiel de déterminer **à quels ensembles** appartiennent les différentes variables

**Propriété 9 : Composée (1)**

$\forall x \in F,\ (f \circ f^{-1})(x) = x$

$\forall x \in E,\ (f^{-1} \circ f)(x) = x$

<u>Démonstration</u>

- Mq $\forall x \in F, (f \circ f^{-1})(x) = x$
  Soit $x \in F$
  $(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = f(y)$ avec $y = f^{-1}(x)$
  On a $y \in E$
  Or, d'après la <u>définition</u> de la réciproque $y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x$
  Donc $(f \circ f^{-1})(x) = f(y) = x$
- Mq $\forall x \in E (f^{-1} \circ f)(x) = x$ ( Même principe !)

Soit $x \in E$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) \quad \text{en posant} \quad y = f(x) \in F$$

Par définition de $f^{-1}$, on a : $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$

Donc $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(y) = x$ CQFD

**Définition 13 : Application identité**

Soit $E$ un ensemble.
L'application identité est l'application de $E$ dans $E$ notée $\mathrm{Id}_E$ et définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$$

ou encore :

$$\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$$

Pour $f : E \to F$, on a : $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$

**Propriété 10 : Composée (2)**

Soit $f : E \to F$ une application bijective et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque.
Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$

Démonstration

- $f \circ f^{-1} : F \to F$ et $\mathrm{Id}_F : F \to F$
  Même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée.
- $\forall x \in F, (f \circ f^{-1})(x) = x = \mathrm{Id}_F(x)$ (d'après la propriété précédente)
- Conclusion : on a bien $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$

On fait de même pour montrer que $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$

# 5 Dérivation

## 5.1 Définitions

**Définition 14 : Rapport de Newton**

Le rapport de Newton de de $f$ en $a$ est le coefficient directeur de la droite $(AM)$ avec $A(a,\ f(a))$ et $M(x,\ f(x))$

Il est égal à $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

**Définition 15 : Dérivée**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
$f$ est dérivable en $a$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe et est } \textbf{finie}.$$

Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**Remarque** : Dans les calculs concrets, la formule $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est souvent plus pratique à utiliser. (Car il est plus facile de raisonner avec des trucs qui tendent vers 0)

**Exemples** : Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto x^4$ en 2, en $a$ ,
la dérivée de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ en 2, en $a > 0$

**Propriété 11 : continuité et dérivabilité**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

Si $f$ est dérivable en $a \in I$, alors $f$ est continue en $a$

Remarque : dans la pratique, cette propriété n'est pas très utile.

**Définition 16 : Dérivée à gauche, à droite**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
$f$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \left(\text{resp.} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

existe et est finie.

Dans ce cas, on note

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\left(\text{resp.} \quad f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)$$

**Exemple** : $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0.

**Propriété 12 formules de calculs**

$(a.f+bg)' = a.f' + b.g'$

$(f.g)' = f.g' + f'.g$

$(f^n)' = nf^{n-1}.f'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$(fog)' = (f'og) \times g'$

**Propriété 13 : Dérivée de la composée**

Soient $g : I \in \mathbb{R},\ f : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$g(I) \subset J$, $g$ est dérivable en $a \in I$ et $f$ dérivable en $g(a) \in J$

Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a$

et $(f \circ g)'(a) = (f' \circ g)(a).g'(a) = f'(g(a)).g'(a)$

**Remarque** : $g(I) \subset J$ équivaut à dire que : $\forall x \in I,\ g(x) \in J$
Cela garantit que pour tout $x \in I, f(g(x))$ est bien défini.

**Définition 17 : Dérivée sur un intervalle**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ .
On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$.
La fonction qui a tout point de $I$ associe le nombre dérivé de $f$ en ce point est appelée la fonction dérivée de $f$ et est notée $f'$.

**Propriété 14 Dérivée et tangente**

- Si $f$ est dérivable en $a$ alors $C_f$ admet une tangente en $a$ de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
- Si $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ (resp. $-\infty$),
alors $C_f$ admet une **tangente verticale** en $a$

**Exemple** : Dérivabilité de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 ?

Examinons si $f$ est dérivable en 0

Rapport de Newton en 0 : Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +8$

Donc $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. (Mais $C_f$ admet une tangente verticale en $(0,0)$)

## 5.2 Dérivées successives

**Définition 18 : Dérivées successives**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$
Si $f'$ est dérivable, on note $f''$ la dérivée de $f'$, appelée *dérivée seconde* de $f$.
Si $f''$ est dérivable, on note $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ la dérivée troisième de $f$.
De même, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$ si elle existe.
On a $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$
Par convention : $f^{(0)} = f$.

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $f^{(3)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f^{(n)}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

**Définition 19 : Fonction de classe $C^n$**

$f$ est dite de classe $C^n$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue sur $I$.
$f$ est dite de classe $C^0$ si $f$ est continue.
$f$ est dite de classe $C^\infty$ si $f$ admet des dérivées à tous les ordres.

**Propriété 15 : $C^n(I)$**

L'ensemble des fonction de classe $C^n$ sur $I$ est noté : $C^n(I)$
$C^n(I)$ et $C^\infty(I)$ sont des sous-espaces vectoriels.

## 5.3 Fonctions monotones

**Propriété 16 : Fonction constante**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,\ b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur $]a,\ b[$.
Alors $f$ est constante sur $[a,\ b]$ si et seulement si : $\forall x \in ]a,\ b[, \quad f'(x) = 0$

**Propriété 17 : Fonction monotone**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $[a,\ b]$ si et seulement si :

$$\forall x \in ]a,\ b[, \quad f'(x) \geq 0 \quad (\text{resp.} \quad f'(x) \leq 0).$$

**Propriété 18 : fonction strictement monotone**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,\ b[$. Si

$$f' > 0 \text{ sur } ]a,\ b[ \text{ (resp. } f'(x) < 0 \text{ sur } ]a, b[\ ).$$

alors
$f$ est **strictement** croissante (resp. **strictement** décroissante) sur $[a,\ b]$

**Propriété 19 : fonction strictement monotone (2)**

Soit $f$ une fonction définie sur un **intervalle** $I$ telle que

- $f$ est continue sur $I$
- $f$ est dérivable sur $I \backslash F$ où $F$ contient un *un nombre fini de points* de $I$
- $f' > 0$ sur $I \backslash F$ (resp. $f' < 0$ sur $I \backslash F$ )

alors $f$ est **strictement** croissante (resp. **strictement** décroissante) sur $I$

**Définition 20 : Extremum local/ global**

Soit $f$ définie sur $I$ et $a \in I$

- $f$ admet un maximum global en $a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I,\ f(x) \leq f(a)$
- $f$ admet un maximum local en $a$

  $\Longleftrightarrow$ il existe un intervalle <u>ouvert</u> $J$ contenant $a$ tel que

  $$\forall x \in J,\ f(x) \leq f(a)$$
- $f$ admet un extremum local (resp. global) en $a$
  $\Longleftrightarrow$ $f$ admet un mimimum ou un maximum local (resp. global) en $a$

**Propriété 20 : Extremum local**

Soit $f$ définie et dérivable sur $[a, b]$ et $x_0 \in ]a,\ b[$

Si $f'$ s'annule en $x_0$ en changeant de signe
Alors $f$ admet un extremum local en $x_0$

« $f'$ s'annule en $x_0$ en changeant de signe »,
cela signifie qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f' < 0 \text{ sur } ]x_0 - \alpha,\ x_0[ \quad \text{et} \quad f' > 0 \text{ sur } ]x_0,\ x_0 + \alpha[$$

ou bien le contraire

## 5.4 Fonction réciproque

**Propriété 21 : dérivée de la réciproque**

Soit $f$ une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle $I$, alors $f$ admet une réciproque $f^{-1}$ de $f(I)$ sur $I$ et :

Pour tout point $y$ de $f(I)$,

Si $f$ est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ et si $f'(x) \neq 0$,

alors $f^{-1}$ est dérivable en $y$

et $$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$$

<u>Démonstration</u>
On sait que $f^{-1}$ est continue sur $f(I)$.
Soit $y_0 \in f(I)$

Supposons $f$ dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$ de dérivée $f'(x_0) = a \neq 0$

On a donc : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$

Posons $\Delta(y) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ pour $y \neq y_0$

Il existe $x \in I$ tel que : $x = f^{-1}(y)$ d'où : $y = f(x)$

De plus, $f$ étant strictement monotone,

$$y \neq y_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x_0) \quad \Rightarrow \quad x \neq x_0$$

Donc : $\Delta(y) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

Or $f^{-1}$ est continue. Donc,

quand $y \to y_0$, $f^{-1}(y) \to f^{-1}(x)$ c'est-à-dire $x \to x_0$

Donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(y) = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \to \dfrac{1}{a}$

Donc $f^{-1}$ est bien dérivable en $y_0$

et $(f^{-1})'(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

**Exemple** : $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$

Cette fonction est strictement croissante et continue donc elle établit une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$

Sa réciproque $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est une bijection continue et strictement croissante .

$\forall y \in [-1,\ 1]$, $\forall x \in [-\pi/2,\ \pi/2]$,

$$y = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Soit $y \in [-1,\ 1]$ et $x \in [-\pi/2,\ \pi/2]$ tels que $y = \sin x$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = 0$$

$\Longleftrightarrow \quad x \in \{-\pi/2, \pi/2\}$ car $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$\Longleftrightarrow \quad y = f(x) = \sin(-\pi/2) = -1$ ou $y = f(x) = \sin(\pi/2) = +1$

Donc $f^{-1}$ est dérivable sur $]-1, +1[$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Or $x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \Rightarrow \quad \cos x \geq 0$

$\Rightarrow \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$

Conclusion : $\forall y \in ]-1, +1[,\quad f^{-1}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

## 6 Prolongement par continuité

**Définition 21 : Prolongement par continuité**

> Soit $f$ une fonction définie sur $I$ telle que $f$ admet une limite **finie** en $x_0$ .
> Alors on dit que $f$ est prolongeable par continuité en $x_0$.
> On définit alors une nouvelle fonction $\tilde{f}$ sur $I$ de la façon suivante :
> $$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in I \\ \tilde{f}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$$
> $\tilde{f}$ est appelé le prolongement par continuité de $f$ en $x_0$

$f$ et $\tilde{f}$ coïncident donc sur $I$.
De plus, par construction, $f$ est continue en $x_0$

**Remarque** D'un point de vue formel, les fonctions $f$ et $\tilde{f}$ sont distinctes. (En effet elles n'ont pas le même ensemble de définition). Mais dans la pratique, il est assez courant d'identifier la fonction $f$ et son prolongement par continuité $\tilde{f}$ quand cela ne prête pas à conséquence.

Exemple : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ pour $x \in [0; 1[\cup]1, +\infty[$