1) $2^n \times 4^{p+1} = \quad 2^n\ (2^2)^{p+1} = 2^{n+2p+2}$ (C 018a)

2) $\cos(x) = -1 \quad \iff \quad x = \pi + 2l\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C 102d)

3) $\tan a = \tan b \quad \iff \quad a = b + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff a = b \quad [\pi]$ (C 160c)

4) $\forall z,\ z' \in \mathbb{C}, \quad |z + z'| = |z| + |z'|$ (C 225c)
$\iff \quad z = 0 \quad \text{ou} \quad \exists a \in \mathbb{R}^+,\ z' = a.z$

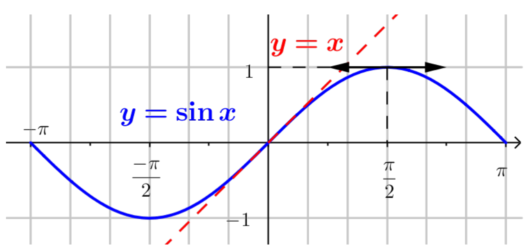
5) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = 1 \iff z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff z$ est un imaginaire pur (C 249c)

6) Racines n-ièmes distinctes de l'unité dans $\mathbb{C}$: (C 321c)
sont de la forme $\quad z_k = \omega^k \quad$ avec $\quad \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} \quad$ et $\quad k \in [[0, n-1]]$

7) $A(a), B(b), C(c)$ sont alignés $\quad \iff \quad \boxed{\dfrac{c-a}{c-b}} \in \mathbb{R}$ (C 357a)

Explication : on doit avoir $\quad \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad$ avec $k \in \mathbb{R}$
$\iff \quad (c-a) = k(b-a) \quad \iff \quad k = \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$
N'importe quelle autre quotient convient aussi : $\quad \frac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}$, etc.

8) Tracer l'allure de la courbe de $\quad x \mapsto \sin x$ sur $[-\pi,\ \pi]$ (C 446a)



Tracer la tangente en 0 et donner son équation : $\quad y = x$

9) Défintion : $\quad (u_n)$ est une suite arithmétique de raison r (C 510c)
$\iff \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r) \quad \iff \quad u_n = u_0 + n.r$

10) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k} = \sum_{k=1}^{n} (x^2)^k$ (C 517a)
Si $x^2 \neq 1, \quad S_n = x^2 \dfrac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} = \dfrac{x^2 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$
Si $x^2 = 1 \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1) \quad S_n = n$

11) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (C 545b)
à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cas $\Delta = 0$ avec $\Delta = a^2 + 4b$:
Alors les solutions réelles sont de la forme :
$u_n = \quad r_0^n(\lambda + \mu.n) \quad$ avec $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
et $\quad r_0 \quad$ racine(s) $\quad$ (double) de l'équation $\quad r^2 = ar + b$

12) Soit la suite (u_n) définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 6$ (C 549a)
Exprimer u_n en fonction de n et u_0 :
Point fixe ℓ : $\quad \ell = -2\ell + 6 \quad \iff \quad \ell = 2$
Par soustraction : $\quad u_{n+1} - \ell = -2(u_n - \ell) \quad$ (suite géométrique)
$\Rightarrow \quad u_n - \ell = (-2)^n(u_0 - \ell)$
$\Rightarrow \quad u_n = \ell + (-2)^n(u_0 - \ell) = 2 + (-2)^n(u_0 - 2)$

13) Vrai ou Faux...**Vrai** (C 556f)
$a^5 + b^5 \quad$ est factorisable par $\quad a + b$

Car l'expression s'annule quand on remplace b par $-a$:
$a^5 + (-a)^5 = a^5 - a^5 = 0$

14) $\forall k \in [[1, n]],\ x_k \geq a \quad \iff \quad \min(x_1,\ \ldots,\ x_n) \geq a$ (C 588f)

15) Pour $n \geq 1, \quad \displaystyle\prod_{k=0}^{n} j = j^{n+1}$ (C 610a)

16) $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ valable pour $1 \leq p \leq n-1$ (C 632a)

$1 \leq p$ pour que $\binom{n-1}{p-1}$ existe

$p \leq n-1$ pour que $\binom{n-1}{p}$ existe

17) Soit $\mathcal{P}$ une propriété (C 712b)

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \left[\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)\ \right] \Rightarrow x = y$$

signifie que : il existe au plus une valeur x de E vérifiant la propriété $\mathcal{P}$

18) Définition $f : E \to F$ est bijective (C 756b)

$\iff$ tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E

Ne surtout pas dire « toute **image** admet un unique antécédent »
En effet, si y est déjà une image, cela veut dire, par définition, que y admet déjà un antécédent.
Donc « Toute image admet au moins un antécédent » est une tautologie
La question question ici est de savoir si tout élément **quelconque** y de F est bien l'image d'un élément de x et d'un seul

19) Équivalent en 0 avec sin : $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ (C 806b)

20) Démontrer $f = o(h)$ et $g = o(h)$ en a $\Rightarrow$ $f.g = o(h^2)$ en a (C 823e)

Supopsons $f = o(h)$ et $g = o(h)$ en a

$\Rightarrow \lim\limits_a \dfrac{f}{h} = 0$ et $\lim\limits_a \dfrac{g}{h} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_a \dfrac{f}{h} \cdot \dfrac{g}{h} = \lim\limits_a \dfrac{f.g}{h^2} = 0$

$\Rightarrow f.g = o(h^2)$ en a

21) Si ℓ est un réel non nul $(\ell \in \mathbb{R}^*)$ (C 833)

Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell$

22) $\arccos(\cos x) = x$ pour $x \in [0,\ \pi]$ (C 901a)

23) arccos est définie sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (C 908b)

24) $\arccos\big(\cos(-12\pi/5)\big) = \arccos\big(\cos(-12\pi/5 + 2\pi)\big)$ (C 915c)

$= \arccos\big(\cos(-2\pi/5)\big) = \arccos\big(\cos(2\pi/5)\big) = 2\pi/5$ car $2\pi/5 \in [0,\ \pi]$

25) Déf : La fonction f n'est pas strictement croissante sur I (C 1002b)

$\iff \exists (a,\ b) \in I^2,\ a < b$ ET $f(a) \geq f(b)$

C'est la négation de $\forall (a,b) \in I^2,\quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

26) Définition : Soit f définie sur I et $a \in I$ (C 1017a)

f admet un maximum global en a $\iff$ $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$

27) Dérivabilité et dérivée de la réciproque en $y \in J$ (C 1036c)

Soit f une bijection de I sur J

Si f est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ et $f'(x) \neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable en y et $\boxed{f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}}$

Bien donner le lien entre x et y sinon écrire $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ n'a aucun sens

28) $(a \neq 0)$ $\displaystyle\int^u e^{ax}\,dx = \frac{e^{au}}{a}$ sur $\mathbb{R}$ (C 1056)

29) $\displaystyle\int^x \frac{3\ dt}{\sqrt{2-4t}}$ Primitive du type $\sqrt{u}$ avec $\left[\sqrt{u}\right]' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (C 1072)

$$\int^x \frac{3\ dt}{\sqrt{2-4t}} = \int^x 3\frac{2}{-4} \cdot \frac{-4\ dt}{2\sqrt{2-4t}} = \frac{-3}{2}\sqrt{2-4x} \quad \text{sur} \quad]-\infty;2[$$

30) Définition : Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (C 1220a)

$\iff \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq p \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Évitez les formulations relâchées du type

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Quand on demande une définition, on sort l'artillerie lourde