

Exercice 1

- 1) Trouver les couples $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 + \mathbf{i} \\ z_1 z_2 = 4 + 3\mathbf{i} \end{cases}$
- (z_1, z_2) sont les racines de $P(z) = z^2 - Sz + P = z^2 - (3 + \mathbf{i})z + (4 + 3\mathbf{i})$
- $$\Delta = (3 + \mathbf{i})^2 - 4(4 + 3\mathbf{i}) = (9 + 6\mathbf{i} - 1) + (-16 - 12\mathbf{i}) = -8 - 6\mathbf{i}$$
- Cherchons $\delta = x + \mathbf{i}y$ tel que $\delta^2 = \Delta$
- $$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ 2xy = -6 & (2) \end{cases}$$
- $$x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{2^2(4^2 + 3^2)} = 2\sqrt{16 + 9}$$
- $$\Rightarrow x^2 + y^2 = 10 \quad (3)$$
- (1)+(3) $\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$ Par exemple : $x = 1$
- (2) $\Rightarrow xy = -3 \Rightarrow y = -3$
- D'où $\delta = 1 - 3\mathbf{i}$
- $$x_1 = \ll \frac{-b + \delta}{2a} \gg = \frac{(3 + \mathbf{i}) + (1 - 3\mathbf{i})}{2} = 2 - \mathbf{i}$$
- $$x_2 = \ll \frac{-b - \delta}{2a} \gg = \frac{(3 + \mathbf{i}) - (1 - 3\mathbf{i})}{2} = 1 + 2\mathbf{i}$$
- Il y a donc deux couples solutions possibles :
- $$S = \{(2 - \mathbf{i}; 1 + 2\mathbf{i}); (1 + 2\mathbf{i}; 2 - \mathbf{i})\}$$
- Vérification :
- $$x_1 + x_2 = (2 - \mathbf{i}) + (1 + 2\mathbf{i}) = 3 + \mathbf{i}$$
- $$x_1 \cdot x_2 = (2 - \mathbf{i})(1 + 2\mathbf{i}) = 2 + 2\mathbf{i} - \mathbf{i} + 2 = 4 + 3\mathbf{i} \quad \text{Ca marche}$$
- 2) On pose $A = \arccos \frac{-3}{5} + \arcsin \frac{1}{3}$
- a) Calculer $\alpha = \sin A$
- Posons $a = \arccos \frac{-3}{5}$ $b = \arcsin \frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow \cos a = \frac{-3}{5}$ avec $a \in [0, \pi]$
 et $\sin b = \frac{1}{3}$ avec $b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 - Donc $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$
 $\Rightarrow |\sin a| = \frac{4}{5}$
 $\Rightarrow \sin a = \frac{4}{5}$ car $a \in [0, \pi] \Rightarrow \sin a \geq 0$
 - Et $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$$\Rightarrow |\cos b| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{car} \quad b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos b \geq 0$$

- $\alpha = \sin A$
 $= \sin(a + b)$
 $= \sin a \cos b + \cos a \sin b$
 $= \frac{4}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{-3}{5} \cdot \frac{1}{3}$
 $= \frac{8\sqrt{2} - 3}{15}$

b) En déduire une expression de A en fonction de $\arcsin \alpha$

Il faut maintenant déterminer dans quel intervalle est A

- $\cos a = \frac{-3}{5} < 0$ avec $a \in [0, \pi]$
 $\Rightarrow a \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
- $\sin b = \frac{1}{3} > 0$ avec $b \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\Rightarrow b \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- D'où $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi \\ 0 \leq b \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq a + b \leq \frac{3\pi}{2}$
 $\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{3\pi}{2}$
 $\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq A - \pi \leq \frac{\pi}{2}$
- Or $\sin A = \sin(\pi - A)$
 $\Rightarrow \alpha = \sin(\pi - A)$ avec $\pi - A \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\Rightarrow \arcsin \alpha = \pi - A$
 $\Rightarrow A = \pi - \arcsin \alpha = \pi - \arcsin \frac{8\sqrt{2} - 3}{15}$

3) On pose $f(x) = \sin(2 \arctan x)$

a) Préciser D_f , le domaine de définition de f

$f(x)$ existe si et seulement si $\arctan x$ existe et $2 \arctan x \in D_{\sin} = \mathbb{R}$
 Or \arctan est définie sur \mathbb{R}
 Donc $D_f = \mathbb{R}$

b) Donner l'expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in D_f$
 (C'est-à-dire sans aucune fonction trigonométrique)

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\alpha = \arctan x$

$$\iff \tan \alpha = x \quad \text{et} \quad \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$$

Donc $f(x) = \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

Or $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + x^2}$

Donc $f(x) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 2 \frac{\sin(\alpha)}{\cos \alpha} \cos^2(\alpha) = 2 \tan \alpha \cos^2(\alpha)$

$$= 2x \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

4) Déterminer la limite suivante en utilisant la définition de la dérivée :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2 + 3x) - \ln 8}{x - 2}$$

Posons $f(x) = \frac{\ln(2 + 3x) - \ln 8}{x - 2}$ et $g(x) = \ln(2 + 3x)$

$$f(x) = \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$$

Or g est définie, continue, dérivable sur $] -2/3; +\infty[$

et $g'(x) = \frac{3}{2 + 3x} \Rightarrow g'(2) = \frac{3}{7}$

D'où $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2 + 3x) - \ln 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2) = \frac{3}{7}$

Exercice 2

Déterminer un équivalent le plus simple possible pour chacune des expressions suivantes :

$$f(x) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad \text{en } 0$$

$$g(x) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad \text{en } +\infty$$

$$h(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 4x - \cos 5x} \quad \text{en } 0$$

a) $f(x) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad \text{en } 0$

Quand $x \rightarrow 0$, $X = 2x + 5x^2 \rightarrow 0$

Or $\ln(1 + X) \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$

$$\Rightarrow \ln(1 + 2x + 5x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x + 5x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x \quad \text{car } x^2 = o(x) \text{ en } 0$$

$$\Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$$

b) $g(x) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad \text{en } +\infty$

$$g(x) = \ln \left(x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + 5 \right) \right) = 2 \ln x + \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + 5 \right)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$ et $g_1(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + 5 \right) \rightarrow \ln 5$

$$\Rightarrow g_1(x) = o(\ln x)$$

$$\Rightarrow g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln x$$

c) $h(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 4x - \cos 5x} \quad \text{en } 0$

• On a $\sin X \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ et $3x \rightarrow 0$

Donc $\sin 3x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x$

• D'autre part $1 - \cos X \underset{X \rightarrow 0}{\sim} \frac{X^2}{2}$

Et $\cos 4x - \cos 5x = (1 - \cos 5x) - (1 - \cos 4x)$

avec $1 - \cos 5x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(5x)^2}{2} = \frac{25}{2}x^2$ et $1 - \cos 4x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(4x)^2}{2} = 8x^2$

D'où $\cos 4x - \cos 5x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{25}{2}x^2 - 8x^2 = \frac{9}{2}x^2$

(Équivalents de même nature)

• Donc $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3x}{9x^2/2} = \frac{2}{3x}$

Autre méthode

En utilisant $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$$\cos 4x - \cos 5x = -2 \sin \frac{9x}{2} \sin \frac{-x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2 \frac{9x}{2} \cdot \frac{-x}{2} = \frac{9x^2}{2}$$

Exercice 3

Trouver les limites suivantes :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n \quad \text{en } +\infty$$

$$\frac{e^{x^2-x}}{2x^3+x^2} \quad \text{en } +\infty$$

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \text{ en } +\infty$$

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^{v_n} \quad \text{avec} \quad v_n = n \ln \frac{n+1}{n-1}$$

$$\frac{n+1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{n-1} \rightarrow 1$$

$$\text{Or} \quad \ln X \underset{X \rightarrow 1}{\sim} X - 1$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{n+1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1}{n-1} - 1 = \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \quad v_n \sim 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim v_n = 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = e^2$$

$$\frac{e^{x^2-x}}{2x^3+x^2} \text{ en } +\infty$$

$$\text{Posons} \quad c(x) = \frac{e^{x^2-x}}{2x^3+x^2}$$

$$\bullet \text{ On a } 2x^3+x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^3$$

$$\text{D'où} \quad c(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x^2-x}}{x^3}$$

$$\bullet \text{ Posons } c_1(x) = \frac{e^{x^2-x}}{x^3}$$

$$\ln(c_1(x)) = \ln\left(\frac{e^{x^2-x}}{x^3}\right) \\ = x^2 - x - 3 \ln x$$

$$\text{Or} \quad x = o(x^2) \text{ et } \ln x = o(x^2) \text{ en } +\infty \quad (\text{Croissance comparée})$$

$$\text{Donc} \quad \ln(c_1(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

$$\bullet \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(c_1(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2-x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} c_1(x) = +\infty$$

$$\bullet \text{ Or } c(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot c_1(x) \\ \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = +\infty$$

Exercice 4

On pose $f(x) = (x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}$
et on note C_f sa courbe représentative

a) Monter que f est définie sur un intervalle $[a; b]$ à déterminer

$$f \text{ est définie} \iff \sqrt{-x^2+2x+3} \text{ existe} \iff -x^2+2x+3 \geq 0$$

$$-x^2+2x+3 = -(x^2-2x-3) = -(x+1)(x-3)$$

$$f(x) \text{ existe} \iff -(x+1)(x-3) \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 3$$

$$\text{Donc } D_f = [-1; 3]$$

b) f est-elle dérivable en a ? Peut-on en déduire quelque chose pour le graphe C_f ?

Rapport de Newton (taux d'accroissement) en -1 :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3} - 0}{x+1} \\ = (x+1)\sqrt{-x^2+2x+3} \underset{x \rightarrow -1}{\rightarrow} 0$$

$$f \text{ est donc dérivable en } -1 \quad \text{et} \quad f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = 0$$

C_f admet donc une tangente horizontale au point $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$

c) f est-elle dérivable en b ? Peut-on en déduire quelque chose pour le graphe C_f ?

Rapport de Newton en 3^- :

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}}{x - 3}$$

$$D_f = [-1, 3], \text{ donc } x < 3 \Rightarrow 3 - x > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -(x+1) \frac{\sqrt{(x+1)(3-x)}}{3-x} = -(x+1) \frac{\sqrt{(x+1)(3-x)}}{\sqrt{(3-x)^2}} = \\ -(x+1) \sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{(3-x)^2}} = (1-x) \sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$$

$$\text{Quand } x \rightarrow 3^-, \quad \begin{cases} 3-x \rightarrow 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3-x} \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3-x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \rightarrow +\infty \text{ avec } -(1+x) \rightarrow -4 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \rightarrow -\infty$$

f n'est donc pas dérivable en 3

Et C_f admet une tangente verticale au point $(3, f(3)) = (3, 0)$

Autre calcul :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} &= \frac{(x+1)\sqrt{-(x+1)(x-3)}}{x-3} \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{-(x+1)(x-3)}}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{-(x+1)(x-3)}}{\sqrt{-(x+1)(x-3)}} \\ &= \frac{-(x+1)^2(x-3)}{(x-3)\sqrt{-(x+1)(x-3)}} \\ &= \frac{-(x+1)^2}{\sqrt{-(x+1)(x-3)}} \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow 3^-$, $-(x+1)^2 \rightarrow -16 < 0$, $\sqrt{-(x+1)(x-3)} \rightarrow 0^+$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \rightarrow -\infty \dots$$

d) Déterminer les variations de f

Sur $] -1, 3[$, $-(x+1)(x-3) > 0$, donc f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)' \sqrt{-x^2+2x+3} + (x+1)(\sqrt{-x^2+2x+3})' \\ &= \sqrt{-x^2+2x+3} + (x+1) \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} \\ &= \sqrt{-x^2+2x+3} + (x+1) \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} \\ &= \frac{(-x^2+2x+3) + (x+1)(-x+1)}{(\sqrt{-x^2+2x+3})} \\ &= \frac{(-x^2+2x+3) + (-x^2+1)}{(\sqrt{-x^2+2x+3})} \\ &= \frac{-2x^2+2x+4}{(\sqrt{-x^2+2x+3})} \\ &= \frac{(x+1)(-2x+4)}{(\sqrt{-x^2+2x+3})} \end{aligned}$$

Pour $x \in] -1; 3[$, $x+1 > 0$ donc

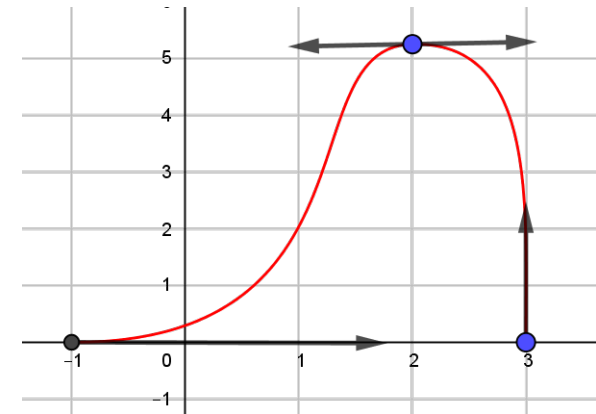
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff (x+1)(-2x+4) > 0 \iff -2x+4 > 0 \\ &\iff x < 2 \end{aligned}$$

$$f(2) = (2+1)\sqrt{-(2+1)(2-3)} = 3\sqrt{3}$$

D'où le tableau de variations

x	-1	2	3		
$f'(x)$	0	+	0	+	
f	0	\nearrow	$3\sqrt{3}$	\searrow	0

e) Représenter graphiquement C_f (avec une échelle intelligente...)



Exercice 5

On donne $0,69 < \ln 2 < 0,7$

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

1. Calculer la dérivée de f

pour $x > 0$, $\ln x$ existe et $x+1 \neq 0$, donc f est bien définie sur $]0, +\infty[$ et de plus C^1 comme quotient de fonctions usuelles

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x+1) - (\ln x)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(x+1) - (\ln x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1 - x \ln x}{x(x+1)^2}$$

2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$
Etudier les variations de la fonction g et donner ses limites en 0 et $+\infty$

$$g(x) = x + 1 - x \ln x$$

g est définie et C^1 sur $]0; +\infty[$

$$g'(x) = 1 - (1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x}) = -\ln x$$

$$g'(x) > 0 \iff -\ln x > 0 \iff x < 1$$

Limites

- En 0

Quand $x \rightarrow 0^+$, $x \ln x \rightarrow 0$ (croissance comparée)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

- En $+\infty$

$$g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \ln x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x(1 - \ln x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$g(1)=2$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
g	1	2	$-\infty$

3. En déduire que la fonction g s'annule en un unique réel α
et que $e < \alpha < 2e$

- Sur $]0, 1]$, on a $g > 1$ Donc g ne s'annule pas

- sur $[1, +\infty[$

g est continue et strictement décroissante. Donc elle réalise une bijection de $I = [1, +\infty[$ sur $g(I) =]-\infty, 2]$

Or $0 \in g(I)$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$

- Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$

$$g(e) = e + 1 - e \ln e = e + 1 - e = 1 > 0$$

$$g(2e) = 2e + 1 - 2e \ln(2e) = 2e + 1 - 2e(1 + \ln 2) = 1 - 2e \ln 2$$

Or $2 < e < 3$

$$0,6 < \ln 2 < 0,7$$

$$\Rightarrow 1,2 < 2e \ln 2 < 2,1$$

$$\Rightarrow g(2e) < 0$$

$$g(e) > g(\alpha) > g(2e)$$

$$\Rightarrow e < \alpha < 2e \text{ car } g \text{ décroissante sur } [1; +\infty[$$

4. En déduire le tableau de signe de g puis le tableau de variations de f (en fonction de α)

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2} \text{ avec } x(x+1)^2 \text{ sur }]0; +\infty[$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
f		\nearrow	$f(\alpha)$	\searrow
				0
				$-\infty$

Remarque : $f(1) = 0$

5. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$\text{On a } g'(\alpha) = 0 \iff \alpha + 1 - \alpha \ln(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{\alpha}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$$

6. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

• En 0

Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\left. \begin{array}{l} \ln x \rightarrow -\infty \\ x+1 \rightarrow 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

• en $+\infty$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \quad (\text{croissance comparée})$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

7. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en 1

$$f'(x) = \frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad f(1) = 0$$

Donc la tangente en 1 a pour équation : $y = \frac{1}{2}(x-1) + 0$

8. Tracer une allure possible de C_f (On choisira des échelles pertinentes et pas identiques pour l'axe des x et l'axe des y).
On donne $\alpha \simeq 3,6$

