Professeur : SERVAIN	**Discipline : Maths**
Classe : PCSI	**Durée de l'épreuve : 3 h 00**
Durée minimale : 2 h 30	**Matériel autorisé : Rien**

- **Marge droite de 2 cm**
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de **première feuille** : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Sanction : -10 %

Exercice 1

1) Trouver les couples $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 + \mathbf{i} \\ z_1 z_2 = 4 + 3\mathbf{i} \end{cases}$

2) On pose $A = \arccos \frac{-3}{5} + \arcsin \frac{1}{3}$
   a) Calculer $\alpha = \sin A$
   b) En déduire une expression de A en fonction de $\arcsin \alpha$

3) On pose $f(x) = \sin(2 \arctan x)$
   a) Préciser D_f, le domaine de définition de f
   b) Donner l'expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in D_f$
   (C'est-à-dire sans aucune fonction trigonométrique)

4) Déterminer la limite suivante en utilisant la définition de la dérivée :
$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2+3x) - \ln 8}{x-2}$$

Exercice 2 Déterminer un équivalent le plus simple possible pour chacune des expressions suivantes :

$fx) = \ln(1 + 2x + 5x^2)$ en 0

$g(x) = \ln(1 + 2x + 5x^2)$ en $+\infty$

$h(x) = \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x - \cos 5x}$ en 0

Exercice 3 Trouver les limites suivantes :
$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \text{ en } +\infty \qquad \frac{e^{x^2-x}}{2x^3+x^2} \text{ en } +\infty$$

Exercice 4

On pose $f(x) = (x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}$
et on note C_f sa courbe représentative

a) Monter que f est définie sur un intervalle $[a;b]$ à determiner
b) f est-elle dérivable en a ? Peut-on en déduire quelque chose pour le graphe C_f ?
c) f est-elle dérivable en b ? Peut-on en déduire quelque chose pour le graphe C_f ?
d) Déterminer les variations de f
e) Représenter graphiquement C_f (avec une échelle intelligente...)

Exercice 5

On donne $0,69 < \ln 2 < 0,7$

Soit la fonction f définie sur $]0,\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$

1. Calculer la dérivée de f
2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$
   Etudier les variations de la fonction g et donner ses limites en 0 et $+\infty$
3. En déduire que la fonction g s'annule en un unique réel α
   et que $e < \alpha < 2e$
4. En déduire le tableau de signe de g puis le tableau de variations de f (en fonction de α)
5. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$
6. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$
7. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en 1
8. Tracer une allure possible de C_f (On choisira des échelles pertinentes et pas identiques pour l'axe des x et l'axe des y).
   On donne $\alpha \simeq 3,6$