1 Primitives

Définition 1 : Primitive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle primitive de f sur I une fonction F dérivable sur I telle que $\quad \forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

Propriété 1 : Primitives de f

Soit F une primitive de f sur un <u>intervalle</u> I.

F_1 est une primitive de f sur I si et seulement si

il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que : $\quad F_1 = F + K$

« Les primitives sont définies à une constante additive près. »

<u>Démonstration</u>

$\Rightarrow$ Supposons $\quad F_1$ primitive de F
Posons $\quad G = F - F_1$.
On a : $\quad G' = F' - F_1' = f - f = 0 \quad$ sur l'<u>intervalle</u> I
Donc G est constante sur I
$\exists K \in \mathbb{R}$ tel que $\quad G = K \quad \Rightarrow \quad F_1 = F + K$.

$\Leftarrow$ Supposons $\quad F_1 = F + K$
$F_1' = F' + 0 = f \quad \Rightarrow \quad F_1$ est une primitive de f sur I.

Propriété 2 : Existence d'une primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors f admet une primitive F sur I.

Résultat admis.

Propriété 3

Soit f une fonction admettant une primitive sur I
Soient $\quad a \in I \quad$ et $\quad b \in \mathbb{R}$.
Alors il existe une unique primitive F de f telle que $\quad F(a) = b$.

<u>Démonstration</u>

- Soit F_1 une primitive de f sur I.
  Posons $\quad F(x) = F_1(x) - F_1(a) + b$
  F est une primitive de f et $\quad F(a) = F_1(a) - F_1(a) + b = b$
- De plus F est unique :
  En effet, soit F_2 une primitive de f telle que $F_2(a) = b$
  On a $\quad F_2(a) = F(a)$ et $F_2' = F'$ sur I
  Donc $F_2 = F$.

Définition 2 : Notation

On note parfois les primitives de la façon suivante :

$$\int^x t^3 \ \mathrm{d}t = \frac{x^4}{4}$$

Cette notation est à utiliser avec précaution

2 Intégrales

2.1 préliminaires

Propriété 4 : Propriété fondamentale

Soit f une fonction <u>continue</u> sur un <u>intervalle</u> I et F une primitive de f sur I. Soit $(a,b) \in I^2$.

On a : $\quad \int_a^b f(t)\ dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Propriété 5

La définition de $\quad \int_a^b f(t)\ dt \quad$ est indépendante de la primitive F de f choisie.

Propriété 6 : Primitive s'annulant en a

Soient I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction continue sur I.

Alors la fonction $\quad x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \quad$ est <u>la</u> primitive de f qui s'annule en a.

Propriété 7 : Conséquence

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$
Alors la fonction $\quad x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt \quad$ est continue, dérivable et de dérivée continue c'est-à-dire est de classe C^1 sur I.

3 Égalités

Propriété 8

Soient I un intervalle, $(a,b) \in I^2$ et f une fonction continue sur I.
Alors $\quad \int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \quad$ et $\quad \int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Propriété 9 : Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur I, $\quad (a,\ b,\ c) \in I^3$

Alors $\quad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I.

$\int_a^b f + \int_b^c f = \big(F(b) - F(a)\big) - \big(F(c) - F(b)\big) = F(c) - F(a) = \int_a^c f$

Propriété 10 : Généralisation

Soient f une fonction continue sur I et $\quad a_0,\ a_1 \ldots\ldots a_n \quad (n+1)$ points de I.

Alors $$\int_{a_0}^{a_n} f = \int_{a_0}^{a_1} f + \int_{a_1}^{a_2} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f$$

Propriété 11 : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur I, $(a,\ b) \in I^2$ et $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Démonstration Soit F et G deux primitives respectivement de f et g sur I.
Alors $\quad H = \alpha F + \beta G \quad$ est une primitive de $\quad \alpha.f + \beta.g \quad$ sur I. D'où :
$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + \beta g) &= H(b) - H(a)\\ &= (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a)\\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) \check{} G(a))\\ &= \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\end{aligned}$$

3.1 Intégration par parties

Propriété 12 : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions **de classe** C^1 sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$.

Alors : $\quad \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$

Démonstration Posons $\quad \varphi = u.v$
u et v sont C^1 donc φ l'est aussi et
$$\varphi' = u'.v + u.v' \quad \text{est continue sur } [a,b]$$
Donc
$$\int_a^b u'v + u.v' = \int_a^b \varphi' = \varphi(b) - \varphi(a) = [\varphi]_a^b$$
$$\Rightarrow \quad \int_a^b u'v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$$

Applications :
Calculer $\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x$
Trouver une primitive de $t \mapsto t \ln t$

3.2 Changement de variable

Définition 3 : Notation différentielle

Soit f une fonction et u un paramètre
On note $\quad \mathrm{d}(f(x)) = f'(x)\ \mathrm{d}x$

Exemples : $\mathrm{d}(x^3) = 3x^2\ \mathrm{d}x \quad d(1/u) = -\ \mathrm{d}u/u^2 \quad \mathrm{d}(\mathrm{e}^{t^2}) = 2t.\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t$

Propriété 13 : Intégration par changement de variable

Soient
- $a,\ b$ dans un intervalle I
- φ une fonction de classe C^1 sur I
- f une fonction continue sur $\varphi(I)$

Alors : $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

Démonstration

- f est continue donc admet une primitive F sur I
  On a donc :
  $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\ \mathrm{d}u = [F(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = G(b) - G(a)$$
  en ayant posé $\quad G = F \circ \varphi$
- F et φ sont de classe C^1, donc G l'est également, et
  $$G' = (F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi).\varphi' = (f \circ \varphi).\varphi'$$
  est continue sur I et donc
  $$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b G'(t)\ \mathrm{d}t = [G(t)]_a^b = G(b) - G(a)$$
  Ce qui prouve l'égalité demandée

Exemple : Calculer : $\quad \int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt \quad$ (Poser $\quad u = \varphi(t) = \sqrt{t}$)

Applications

Propriété 14 : Parité

- Si f est paire,

  alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(t)\ \mathrm{d}t$

  et $\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$
- Si f est impaire,

  alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{-b}^{-a} f(t)\ \mathrm{d}t$

  et $\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Démonstration On pose $t = -u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = -\ \mathrm{d}u$

Bornes $\begin{cases} t = b & \Rightarrow \quad u = -b \\ t = a & \Rightarrow \quad u = -a \end{cases}$

D'où $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-a}^{-b} f(-u)(-\ \mathrm{d}u) = \int_{-b}^{-a} f(-u)\ \mathrm{d}u$

- Si f est paire, $f(-u) = f(u) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(u)\ \mathrm{d}u$

  Et $\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{-a} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$
- Si f est impaire, $f(-u) = -f(u) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{-b}^{-a} f(u)\ \mathrm{d}u$

  $\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{-a} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Propriété 15 : Fonctions périodiques

Soit f une fonction de T-périodique sur $\mathbb{R}$.
Alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall k \in \mathbb{Z}$,

- $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{a+k.T}^{b+k.T} f(t)\ \mathrm{d}t$
- $\int_a^{a+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\ \mathrm{d}t$

Démonstration

- Posons $u = t + k.T \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \ \mathrm{d}u$

  Bornes : $\begin{cases} t = b & \Rightarrow \quad u = b + k.T \\ t = a & \Rightarrow \quad u = a + kT \end{cases}$

  $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{a+k.T}^{b+k.T} f(u - kT)\ \mathrm{d}u = \int_{a+k.T}^{b+k.T} f(u)\ \mathrm{d}u$

  car f est T-périodique $T \quad \Rightarrow \quad f(u - kT) = f(u)$
- $\int_a^{a+T} f = \int_a^b f + \int_b^{b+T} f + \int_{b+T}^{a+T} f$

  $= \int_a^b f + \int_b^{b+T} f + \int_b^a f = \int_b^{b+T} f$

4 Inégalités

Propriété 16 : positivité

Soient I un intervalle, f et g des fonctions continues sur I et $(a,\ b) \in I^2$ tel que :

$\boxed{a \le b}$ (on dira que **les bornes sont dans le bon sens**).

Alors :

a) $f \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \ge 0$ (positivité de l'intégrale)

b) $f \le g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \le \int_a^b g$ (croissance **de l'intégrale**)

Démonstration

- Soit f continue sur I. Donc f admet une primitive F

  Supposons $f \ge 0$ Alors F est croissante sur I

  Or $a \le b \quad \Rightarrow \quad F(a) \le F(b) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = F(b) - F(a) \ge 0$
- Supposons $f \le g$

  $\Rightarrow \quad g - f \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b (g - f) \ge 0$ car $a \le b$

  $\Rightarrow \quad \int_a^b g - \int_a^b f \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g \ge \int_a^b f$

Propriété 17 : Encadrement

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a,\ b) \in I^2$ tel que :
$\boxed{a \le b}$ (BBS). Alors :

a) $m \le f \le M \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$ avec $(m,\ M) \in \mathbb{R}^2$

b) $|f| \le M \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f \right| \le M(b-a)$ avec $M \in \mathbb{R}^+$

Démonstration

- a) découle de ce qui précède et de $\int_a^b m\ \mathrm{d}t = m(b-a)$
- Supposons $|f| \le M$

  $\Rightarrow \quad -M \le f \le M$

  $\Rightarrow \quad -M(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$ car $a \le b$

  $\Rightarrow \quad \left| \int_a^b f \right| \le M(b-a)$

Propriété 18 : valeur absolue

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a,\ b) \in I^2$ tel que : $\boxed{a \leq b}$ (BBS). Alors :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

<u>Démonstration</u>
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$

Donc $\forall t \in I, -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$

$\Rightarrow \quad -\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \quad$ car $\quad a \leq b$

$\Rightarrow \quad \left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$

Remarque : Si on a les bornes « dans le mauvais sens », c'est-à-dire $b \leq a$, alors toutes les inégalités sont renversées :

Propriété 19 : Bornes dans le mauvais sens

Soit $b \leq a$, on a alors

a) $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq 0$ (positivité de l'intégrale)

b) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \geq \int_a^b g$ (croissance)

c) $m \leq f \leq M \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \geq \int_a^b f \geq M(b-a)$

avec $(m,\ M) \in \mathbb{R}^2$

Propriété 20 : BMS et valeur absolue

Soit $b \leq a$, on a alors

a) $|f| \leq M \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f \right| \leq M(a-b)$ avec $M \in \mathbb{R}^+$

b) $\left| \int_a^b f \right| \leq -\int_a^b |f| = \int_b^a |f|$

Il faut toujours vérifier que le terme de droite est positif

Exemple : Déterminer le signe de $f(x) = \int_x^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t$

Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x$

Propriété 21 : intégrale nulle

f une fonction <u>positive</u> et <u>continue</u> sur $[a,b]$ tel que $a < b$ (BBS)

Alors $\int_a^b f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$

<u>Démonstration</u>
f est continue donc possède une primitive F qui est C^1

$F' = f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F$ est croissante sur $[a,b]$

Donc $\forall t \in [a,b],\ F(a) \leq F(t) \leq F(b)$

Or $\int_a^b f = 0 \quad \Rightarrow \quad F(b) - F(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(a) = F(b)$

Donc $\forall t \in [a,b],\ F(a) \leq F(t) \leq F(a) \quad \Rightarrow \quad F(t) = F(a)$

La fonction F est donc constante sur $[a,b]$

D'où $F' = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$ CQFD

5 Intégrales dépendant des bornes

Exemple : continuité et dérivabilité et variations de f telle que $f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t$

- Signe de f

  $\mathrm{e}^{t^2} \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

  $$\int_x^{2x} \mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t \geq 0 \iff x \leq 2x \quad \text{(Bornes dans le bon sens)} \iff x \geq 0$$

  Donc f est positive sur $[0,+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0]$

- Variations de f

  g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G qui est C^1 sur$\mathbb{R}$.

  Donc $f(x) = \int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t = G(2t) - G(t)$

  f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

  $$\begin{aligned} f'(x) &= G'(2x).(2x)' - G'(x) \\ &= 2.g(2x) - g(x) \\ &= 2.\exp((2x)^2) - \exp(x) \end{aligned}$$

  $\underline{f'(x) = 2.\exp(4x^2) - \exp(x)}$ Signe de $f'(x)$

  $$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2.\exp(4x^2) - \exp(x) > 0 \\ &\iff 2.\exp(4x^2) > \exp(x) \\ &\iff \ln(2.\exp(4x^2)) > x \\ &\iff \ln 2 + 4x^2 > x \\ &\iff 4x^2 - x + \ln 2 > 0 \end{aligned}$$

  Et on résout l'inéquation de 2nd degré.

6 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Propriété 22 : Décomposition

Toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\varphi : \text{Re}\varphi + \mathbf{i}.\text{Im}\varphi$$

où $\text{Re}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$ sont des fonctions réelles

Propriété 23 : Continuité, dérivabilité

Tout fonction φ à valeur dans $\mathbb{C}$ est continue (resp. dérivable, C^1) si et seulement si

$\text{Re}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$ sont continues (resp. dérivables, C^1)

Propriété 24 : Dérivée

Soit φ à valeur dans $\mathbb{C}$ et dérivable sur I

Alors $\text{Re}(\varphi') = \big(\text{Re}\varphi\big)'$ et $\text{Im}(\varphi') = \big(\text{Im}\varphi\big)'$

Propriété 25

Les formules de calcul des dérivées des fonctions réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Par exemple $(\varphi.\psi)' = \varphi'.\psi + \varphi.\psi'$

Propriété 26 : dérivée et conjugué

Soit φ à valeur dans $\mathbb{C}$ et dérivable sur I

Alors $\overline{\varphi}$ est dérivable sur I et $(\overline{\varphi})' = \overline{\varphi'}$

Propriété 27 : Exponentielle complexe

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ est dérivable et $\big(e^{\varphi}\big)' = e^{\varphi} \times \varphi'$

En particulier : $\forall a \in \mathbb{C},\ \big(e^{a.x}\big)' = a.e^{a.x}$

<u>Démonstration</u> Posons $\varphi = f + \mathbf{i}.g$ où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. On a : $e^{\varphi} = e^{f+\mathbf{i}.g} = e^f(\cos g + \mathbf{i}.\sin g)$

Par composée et produit de fonctions dérivables, on a e^{φ} dérivable et :

$$\begin{aligned}(e^{\varphi})' &= (e^f)'(\cos g + \mathbf{i}.\sin g) + e^f(\cos g + \mathbf{i}.\sin g)' \\ &= (e^f.f')(\cos g + \mathbf{i}.\sin g) + e^f(-\sin g.g' + \mathbf{i}.\cos g.g') \\ &= e^f(\cos g + \mathbf{i}.\sin g).f' + e^f(\mathbf{i}^2.\sin g + \mathbf{i}.\cos g).g' \\ &= \big[e^f(\cos g + \mathbf{i}.\sin g)\big].(f' + \mathbf{i}g') \\ &= e^{\varphi}.\varphi'\end{aligned}$$

Propriété 28 : Primitive

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue (par morceaux) sur un <u>intervalle</u> $I \subset \mathbb{R}$

Alors φ admet des primitives sur $[a,b]$, toutes égales à une constante complexe additive près.

C'est-à-dire que si ψ_1 et ψ_2 sont deux primitives de φ sur l'intervalle I, alors il existe une constante $K \in \mathbb{C}$ telle que $\psi_2 = \psi_1 + K$

Propriété 29 : Intégration

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue (par morceaux) sur l'intervalle I

Alors φ est localement intégrable sur I

De plus, si ψ est une primitive de φ

alors $\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b \varphi(t)\ dt = \psi(b) - \psi(a)$

Propriété 30 : Inégalité du module

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue (par morceaux) sur un intervalle I et $a < b \in I$ (BBS)

Alors $\left|\int_a^b \varphi(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\ dt$

<u>Démonstration</u> Écrivons sous forme exponentielle : $\int_a^b \varphi(t)\ dt = re^{\mathbf{i}\theta}$

$\Rightarrow \left|\int_a^b \varphi(t)\ dt\right| = r$ et $\int_a^b \varphi(t)e^{-\mathbf{i}\theta}\ dt = r$

Posons $\varphi(t)e^{-\mathbf{i}\theta} = \psi(t) = f(t) + \mathbf{i}.g(t)$ avec $f(t),\ g(t) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow r = \int_a^b \psi(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \mathbf{i}\int_a^b g(t)\ dt$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\ dt = r$ et $\int_a^b g(t)\ dt = 0$

$\Rightarrow r = \int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$ car $a \leq b$

Or $\psi(t) = f(t) + \mathbf{i}.g(t) \Rightarrow |f(t)| \leq |\psi(t)| = |\varphi(t)e^{-\mathbf{i}\theta}| = |\varphi(t)|$

$\Rightarrow \int_a^b |f(t)|\ dt \leq \int_a^b |\varphi(t)|\ dt$

Donc $\left|\int_a^b \varphi(t)\ dt\right| = r = \int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b |\varphi(t)|\ dt$

Propriété 31 : Inégalité des accroissement finis

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction C^1 sur l'intervalle I

et $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I,\ |\varphi'(t)| \leq M$

Alors $\forall (x,y) \in I^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x-y|$