**Exercice 1** On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. Montrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite $I_n$
2. Exprimer $I_n$ en fonction de $I_{n+1}$ en faisant une intégration par parties.
3. En déduire un équivalent simple de $I_n$

**Exercice 2** Hyper classique

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \leq \dfrac{1}{k}$

b) En déduire une minoration de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et sa limite.

c) Déterminer aussi une majoration de $S_n$
et en déduire que $S_n \sim \ln n$ en $+\infty$

**Exercice 3** Même style

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$

b) En déduire une majoration de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et sa convergence

**Exercice 4** Soit $f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$

1) Justifier que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$
2) Déterminer le signe et la parité de $f$
3) Justifier que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de $f$
4) A l'aide d'un encadrement judicieux, déterminer la limite de $f$ en $+\infty$
5) Équivalent en $+\infty$
   a) A l'aide d'une intégration par partie, trouver une relation, pour $x \neq 0$, entre $f(x)$ et $g(x) = \int_x^{2x} \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\, \mathrm{d}t$
   b) Montrer que $g(x) = o\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right)$
   c) Déterminer un équivalent le plus simple possible de $f$ en $+\infty$

**Exercice 5 (Résultats à connaître)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T$.
Montrer les résultats suivants :

a) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}$, $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

b) En déduire : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Donner une interprétationgraphique de ces résultats

**Exercice 6** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on définit la fonction $f_n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée $u_n$.
   b. Calculer $u_1$ et $u_2$.
   c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in ]0, \frac{2}{3}[$.
2. a. Montrer que, pour tout $x$ élément de $]0, 1[$, on a :
   $$f_{n+1}(x) < f_n(x).$$
   b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)$.
   c. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$
   d. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
   e. Donner la valeur de $\ell$.
3. a. Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   b. Donner enfin la valeur de $\ell$.

**Exercice 7** Primitive de
$f(x) = \mathrm{e}^{2x} \sin x$ $g(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos 3x$ $h(x) = \sin 2x \cos^3 x$

**Exercice 8** En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

$f_1(t) = \dfrac{2t}{1+t^4}$ $(u = t^2)$ $f_2(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}$ $(u = \mathrm{e}^t)$

$f_3(t) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$ $(u = \mathrm{e}^t)$ $f_4(t) = \dfrac{\sin(t)\cos(t)}{\sin^2(t)+1}$ $(u = \sin t)$