Définition 1 : Combinaison linéaire (CL)

k est CL de $(u,\ v)$

$\iff$ il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\quad k = a.u + b.v$

Définition 2 : libre, lié

(u,v,w) est **libre**

$\iff \forall (a,\ b,\ c)\in\mathbb{R}^3,\ a.u+b.v+c.w=\vec{0} \Rightarrow (a,b,c)=(0,0,0)$

$\iff$ l'équation $\quad a.u+b.v+c.w=\vec{0}\quad$ a pour unique solution $(a,\ b,\ c)=(0,0,0)$

Sinon, on dit que $\quad(u,v,w)$ est **liée**

$\iff \exists (a,\ b,\ c)\in\mathbb{R}^3,\ a.u+b.v+c.w=\vec{0}$ ET $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

Calculs dans $\mathbb{R}^n$

On appelle les éléments de $\mathbb{R}^3$ des triplets mais aussi des vecteurs.
$k\in\mathbb{R}^3 \iff k=(x,y,z)$. $\quad x,y,z$ sont appelés les **composantes** du vecteur k.

Exercice 1

1) Calculer $\quad a=(3,\ -2,\ 1)+(5,\ 7,\ -8) \qquad b=2.(3,\ 2,\ 1)$

$c=2.(7,\ -2,\ 3)-3.(2,\ 3,\ -1) \qquad d=(x,\ y,\ z)+(x',\ y',\ z')$

$e=\lambda.(3,\ 0,\ -7)+\mu.(2,\ -3,\ 8)$

2) Écrire $\quad k=(2x+y,\ 3x-2y+z,\ 2x-z)\quad$ sous la forme $\quad x.u+y.v+z.w$ avec $u,v,w\in\mathbb{R}^3$

Exercice 2 Résoudre

a) Dans $\mathbb{R}^2$: $\quad (S_1)\{2x+y=1 \quad 4x+3y=-2\}$

b) Dans $\mathbb{R}^3$: $\quad (S_2)\{2x+y+z=1 \quad 4x+y-z=-2\}$

Écrire les solutions sous la forme :

$C_1+z.C_2$ avec $C_1,C_2\in\mathbb{R}^3$ puis sous la forme $\quad C_1'+y.C_2'$

Dans $\mathbb{R}^3$: $\quad (S_3)\quad \{2x+y+z=0 \quad 4x+y-z=0\}$

c) Dans $\mathbb{R}^4 \quad (S_4)\quad \{x+2y+z-3t=5\}$ et $\quad (S_4^0)\quad \{x+2y+z-3t=0\}$

Exercice 3 Les systèmes suivants admettent-ils des solutions ? Combien ? (On ne demande pas nécessairement de les résoudre !)

a. $(S_1)\begin{cases}2x+y+z=0\\ x-2y+3z=0\\ 4x-3y+7z=0\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}2x+y+z=1\\ x-2y+3z=2\\ 4x-3y+7z=5\end{cases}$

$(S_3)\{\ 2x+y+z=2 \quad x-2y+3z=3 \quad 4x-3y+7z=1$

b. $(S_4)\begin{cases}2x+y+z=1\\ x-2y+3z=2\\ 4x-3y+7z=3\end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases}2x-3y+z=0\\ x-y+z=0\\ 2x-y+2z=0\end{cases}$

Exercice 4

1) Déterminer l'existence de solutions (a,b) du système :

$(S_1) \quad \{2a+b=x\ ;\ 3a+2b=y\ ;\ 2a-3b=z\}$

Déterminer à quelle condition $k=(x,y,z)$ est CL de (u,v) avec $u=(2,3,2),\ v=(1,2,-3)$

2) Déterminer l'existence de solutions (a,b) du système :

$(S_2) \quad \{-a+b=x\ ;\ 2a-b=y\ ;\ 5a+2b=z\ ; 3a+2b=t\}$

3) Soient $u=(1,2,3)\ ,\ v=(2,3,4)\ ,\ w=(3,5,6),\ t=(-1,3,7)$.
   a. w est-il CL de (u,v) ? $\quad t$ est-il CL de (u,v) ?
   b. Soit $k=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\quad$ A quel condition (portant sur x,y,z) k est-il CL de u,v ?

Exercice 5 Trouver à quelle condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que $k=(x,y,z)$ soit CL de $u=(1,2,3)$ et $v=(1,3,1)$

Exercice 6 Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+2y-3z=0$.

a) Donner deux exemples vecteurs appartenant à F

b) Donner deux exemples vecteurs n'appartenant pas à F

c) Montrer que les éléments de F s'écrivent comme CL de deux vecteurs.

d) Même question avec $\quad E=\mathbb{R}^4,\ F$ d'équation $\{x+2y-3z+t=0 \quad 2x-3y-z+3t=0\}$

Exercice 7

a) $u=(1,2,3)\ ; v=(2,3,4)\ ; w=(3,4,5)\ ; k=(1,1,2)$

(u,v,w) libre ? liée ? $\quad (u,v,k)$ libre ? liée ?

b) $u=(1,\ 3,\ 3)\ ; v=(2,\ 5+a,\ 4)\ ; w=(3,\ a,\ 5)$
(u,v,w) libre ? liée ?