1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3 < x^2 \leq 16$ (C 075c)

$\iff \sqrt{3} < |x| \leq 4$

$\iff -4 \leq x < -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3} < x \leq 4$

$\iff x \in [-4,\ -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},\ 4]$

2) **Formules de linéarisation** : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ (C 121b)

3) Définition : $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ (C 220b)

4) $1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b/2}\right) = 2\mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b/2}\sin(b/2)$ (C 248d)

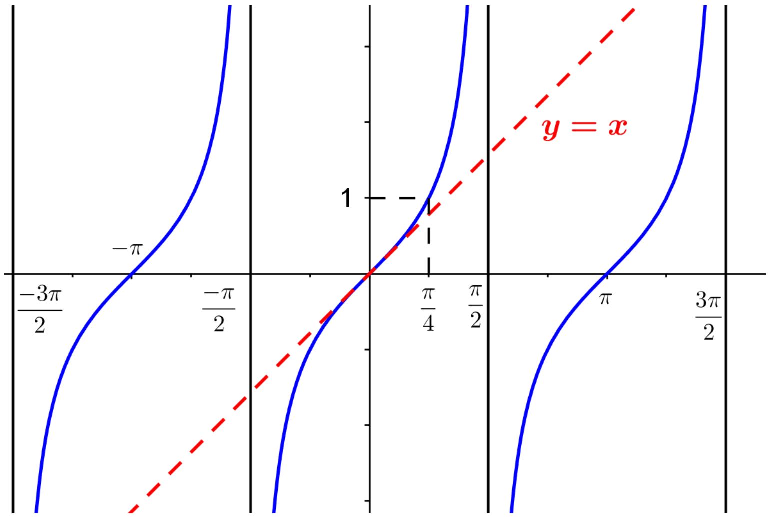
5) Soit $(s,\ p) \in \mathbb{C}^2$ $\quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ $\quad \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases}$ (C 331)

$\iff (z_1,\ z_2)$ sont les racines du polynôme $Q(x) = x^2 - sx + p$

En effet : $Q(x) = (x-z_1)(x-z_2) = x^2 - (z_1+z_2)x + z_1 z_2 = x^2 - sx + p$

6) Soit $a > 0$ $\quad (a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right)' = (\ln a).\mathrm{e}^{x \ln a} = (\ln a).a^x$ sur $\mathbb{R}$ (C 414)

7) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \tan x$ sur $[-3\pi/2,\ 3\pi/2]$ (C 448b)



La courbe doit passer par le point $(\pi/4, 1)$ et la tangente d'équation doit passer en dessous de ce point (elle passe presque par le point $(\pi/4; 1,5)$)

8) (u_n) arithmétique $\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$ (C 511b)

9) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Cas $\Delta \neq 0$ avec $\Delta = a^2 + 4b$ (C 540a)

Alors les solutions complexes sont de la forme : $u_n = \lambda.{r_1}^n + \mu.{r_2}^n$

avec $(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $r_1,\ r_2$ racines de l'équation $r^2 = a.r + b$

10) Avec la valeur absolue : $x \in [-5,\ 1] \iff |x+2| \leq 3$ (C 565c)

Segment de centre -2 et de rayon 3

11) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 602a)

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

Par exemple : $\lfloor 1,5 + 1,5 \rfloor = 3 \neq \lfloor 1,5 \rfloor + \lfloor 1,5 \rfloor = 2$

12) **Formule de Pascal** : (C 631c)

$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ pour $1 \leq p \leq n-1$ entiers

13) Démonstration de : $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ y \geq x$ (C 715b)

Prenons $x = 0$ $\quad x \in \mathbb{N}$

Soit $y \in \mathbb{N}$ On a bien $x \leq y$ CQFD

14) Définition : $x \in A \cup B \iff x \in A$ OU $x \in B$ (C 742d)

15) Limite particulière avec $x \to 0$ de la puissance $(\quad)^a$, $(a \neq 0)$ (C 804a)

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

16) La proposition suivante est **Fausse** (C 810d)

$\forall x \in \mathbb{R},\quad 0 < a \leq b \Rightarrow a^x \leq b^x$

Par exemple, pour $a = 2, b = 3$ et $x = -1$

$a < b$ mais $a^{-1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = b^{-1}$

D'une façon générale : $a^x \leq b^x \iff \mathrm{e}^{x\ln a} \leq \mathrm{e}^{x \ln b} \iff x\ln a < x \ln b$
$\iff x(\ln a - \ln b) < 0$ Donc c'est faux pour $x < 0$

17) Vrai ou faux ? ...**FAUX** (C 830c)

Si f et g admettent des limites finies en a,

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) \quad \Rightarrow \quad f \underset{a}{\sim} g$

> Pour que ce soit vrai, il faut que les limites soient finies non nulles
> Contre exemple en $a=0$: $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$ en 0
> $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et pourtant $f(x) \underset{x\to 0}{\nsim} g(x)$

18) Calculer un équivalent de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+2x\sqrt{x}-1}{x^2+x+1}\right)$ en $+\infty$ (C 843e)

$$X = \frac{x^2+2x\sqrt{x}-1}{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad X \to 1 \quad \text{Or} \quad \ln(1+X) \underset{X\to 1}{\sim} X$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2+2x\sqrt{x}-1}{x^2+x+1} - 1 = \frac{2x\sqrt{x}-x-2}{x^2+x+1} \sim \frac{2x\sqrt{x}}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}$$

19) $\arccos 0 = \quad \pi/2$ (C 911e)

20) $\arcsin x > \frac{\pi}{3} \quad \iff \quad 1 \geq x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (C 924)

> car arcsin est définie sur$[-1,1]$ $\Rightarrow$ $x \in [-1,\ 1]$
> et arcsin strictement croissante : $\arcsin x > \pi/3 \iff x > \sin(\pi/3)$

21) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 1013f)

f est C^0 sur l'intervalle $I \quad \Rightarrow \quad f$ est dérivable sur I

> fC^0 sur I siginifie que f est continue sur I. Or continue n'implique pas dérivable

22) $\displaystyle\int u'u^\alpha = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|u| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$ (C 1051b)

23) $\displaystyle\int^x \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a^2}\int^x \frac{dt}{1+(t/a)^2} = \frac{a}{a^2}\int^x \frac{1/a}{1+(t/a)^2}\ dt$ (C 1069b)

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

24) Soit f une fonction continue un intervalle I (C 1100b)

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a

25) Vrai ou faux ?...**Vrai** (C 1106c)

Si f est impaire Alors $\displaystyle\int_{-a}^{-b} f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt$

> Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(t)\ dt = -\int_a^b f(t)\ dt$
> Ce qui donne le résultat

26) Vrai ou faux ?...**Faux** (C 1116c)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $(a,b)\in I^2$ et $M\in\mathbb{R}$

tels que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq M$

Alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq M(b-a)$

> Il faut que les bornes soient dans le Bon Sens : $a \leq b$

27) Traduire « a partir d'un certain rang, $u_n < v_n$ » (C 1204a)

$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \quad \Rightarrow \quad u_n < v_n$

28) L'implication suivante est FAUSSE (C 1223c)

(u_n) n'est pas minorée $\quad \Rightarrow \quad [\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty\ ]$

Donnez un contre exemple : $u_n = (-1)^n.n$

$u_{2n} = 2n \to +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ est faux

et $u_{2n+1} = -(2n+1) \to -\infty$ donc (u_n) n'est pas minorée

29) **Théorème de convergence :** Soit u une suite croissante (C 1231a)

Si la suite u est majorée

Alors la suite u converge

sinon la suite u tend vers $+\infty$

30) Théorème des suites adjacentes (C 1234b)

Si u et v sont adjacentes (avec u croissante)

Alors u et v convergent vers une même limite ℓ

telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n$