Exercice 1

1) $\boxed{\text{Trouver les couples } (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \text{ tel que } \begin{cases} z_1+z_2=3+\mathbf{i} \\ z_1z_2=4+3\mathbf{i}\end{cases}}$

(z_1, z_2) sont les racines de $P(z)=z^2-Sx+P=z^2-(3+\mathbf{i})z+(4+3\mathbf{i})$

$$\Delta=(3+\mathbf{i})^2-4(4+3\mathbf{i})=(9+6\mathbf{i}-1)+(-16-12\mathbf{i})=-8-6\mathbf{i}$$

Cherchons $\delta=x+\mathbf{i}y$ tel que $\delta^2=\Delta$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-8 & (1) \\ 2xy=-6 & (2)\end{cases}$

$$x^2+y^2=|\delta|^2=|\Delta|=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=\sqrt{2^2(4^2+3^2)}=2\sqrt{16+9}$$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=10 \quad (3)$

(1)+(3) $\Rightarrow \quad 2x^2=2 \quad\Rightarrow\quad x^2=1$ Par exemple : $x=1$

(2) $\Rightarrow \quad xy=-3 \quad\Rightarrow\quad y=-3$

D'où $\delta=1-3\mathbf{i}$

$$x_1=\text{«}\ \frac{-b+\delta}{2a}\ \text{»}=\frac{(3+\mathbf{i})+(1-3\mathbf{i})}{2}=2-\mathbf{i}$$

$$x_2=\text{«}\ \frac{-b-\delta}{2a}\ \text{»}=\frac{(3+\mathbf{i})-(1-3\mathbf{i})}{2}=1+2\mathbf{i}$$

Il y a donc deux couples solutions possibles :

$$\boxed{S=\{(2-\mathbf{i};1+2\mathbf{i});(1+2\mathbf{i};2-\mathbf{i})\}}$$

Vérification :

$$x_1+x_2=(2-\mathbf{i})+(1+2\mathbf{i})=3+\mathbf{i}$$

$$x_1.x_2=(2-\mathbf{i}).(1+2\mathbf{i})=2+2\mathbf{i}-\mathbf{i}+2=4+3\mathbf{i} \quad \text{Ca marche}$$

2) $\boxed{\text{On pose } \quad A=\arccos\frac{-3}{5}+\arcsin\frac{1}{3}}$

a) $\boxed{\text{Calculer } \quad \alpha=\sin A}$

- Posons $a=\arccos\frac{-3}{5}$ $\quad b=\arcsin\frac{1}{3}$

  $\iff \quad \cos a=\frac{-3}{5}$ avec $a\in[0,\ \pi]$

  et $\sin b=\frac{1}{3}$ avec $b\in[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$
- Donc $\sin^2 a=1-\cos^2 a=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

  $\Rightarrow \quad |\sin a|=\frac{4}{5}$

  $\Rightarrow \quad \sin a=\frac{4}{5}$ car $a\in\in[0,\ \pi] \quad\Rightarrow\quad \sin a\geq 0$
- Et $\cos^2 b=1-\sin^2 b=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

  $\Rightarrow \quad |\cos b|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

  $\Rightarrow \quad \cos b=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ car $b\in[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \quad\Rightarrow\quad \cos b\geq 0$
- $\alpha=\sin A$

$$\begin{aligned} &=\sin(a+b)\\ &=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\ &=\frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{-3}{5}\cdot\frac{1}{3}\\ &=\frac{8\sqrt{2}-3}{15}\end{aligned}$$

b) $\boxed{\text{En déduire une expression de } A \text{ en fonction de } \arcsin\alpha}$

Il faut maintenant déterminer dans quel intervalle est A

- $\cos a=\frac{-3}{5}<0$ avec $a\in[0,\ \pi]$

  $\Rightarrow \quad a\in[\frac{\pi}{2},\ \pi]$
- $\sin b=\frac{1}{3}>0$ avec $b\in[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$

  $\Rightarrow \quad b\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$
- D'où $\begin{cases} \frac{\pi}{2}\leq a\leq\pi \\ 0\leq b\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$

  $\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}\leq a+b\leq\frac{3\pi}{2}$

  $\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}\leq A\leq\frac{3\pi}{2}$

  $\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2}\leq A-\pi\leq\frac{\pi}{2}$
- Or $\sin A=\sin(\pi-A)$

  $\Rightarrow \quad \alpha=\sin(\pi-A)$ avec $\pi-A\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

  $\Rightarrow \quad \arcsin\alpha=\pi-A$

  $\Rightarrow \quad A=\pi-\arcsin\alpha=\pi-\arcsin\dfrac{8\sqrt{2}-3}{15}$

3) $\boxed{\text{On pose } \quad f(x)=\sin(2\arctan x)}$

a) $\boxed{\text{Préciser } D_f\text{, le domaine de définition de } f}$

$f(x)$ existe si et seulement si

- $\arctan x$ existe $\iff x\in\mathbb{R}$ car arctan est définie sur $\mathbb{R}$
- $2\arctan x\in D_{\sin}=\mathbb{R}$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

b) Donner l'expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in D_f$ (C'est-à-dire sans aucune fonction trigonométrique)

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\alpha = \arctan x$

$\iff \quad \tan\alpha = x \quad \text{et} \quad \alpha \in]-\pi/2,\ \pi/2[$

Donc $\quad f(x) = \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Or $\quad \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+x^2}$

Donc $\quad f(x) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos\alpha}\cos^2(\alpha) = 2\tan\alpha\cos^2(\alpha)$

$$\boxed{f(x) = \frac{2x}{1+x^2}}$$

Remarque : une autre méthode a été tentée :

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\alpha = \arctan x$

$\iff \quad \tan\alpha = x \quad \text{et} \quad \alpha \in]-\pi/2,\ \pi/2[$

Donc $\quad f(x) = \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Or $\quad \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+x^2}$

Or $\quad \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[\quad \Rightarrow \quad \cos\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \dfrac{+1}{\sqrt{1+x^2}}$

D'autre part : $\quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \quad |\sin\alpha| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

Etudions les différents cas :

- 1er cas : $x \geq 0 \quad \iff \quad \alpha = \arctan x \in [0, \pi/2[$

  Alors $\quad \sin\alpha \geq 0 \Rightarrow |\sin\alpha| = \sin\alpha \quad \text{et} \quad x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$

  D'où $\quad \sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1er cas : $x < 0 \quad \iff \quad \alpha = \arctan x \in]-\pi/2; 0[$

  Alors $\quad \sin\alpha \leq 0 \Rightarrow |\sin\alpha| = -\sin\alpha \quad \text{et} \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

  D'où $\quad -\sin\alpha = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Dans tous les cas : $\quad \sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc $\quad f(x) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{+1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

4) Déterminer la limite suivante en utilisant la définition de la dérivée :
$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2+3x) - \ln 8}{x-2}$$

Posons $f(x) = \dfrac{\ln(2+3x) - \ln 8}{x-2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(2+3x)$

$f(x) = \dfrac{g(x) - g(2)}{x-2}$

Or g est définie, continue, dérivable sur $]-2/3; +\infty[$

et $\quad g'(x) = \dfrac{3}{2+3x} \quad \Rightarrow \quad g'(2) = \dfrac{3}{7}$

D'où $\quad \displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2+3x) - \ln 8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = g'(2) = \frac{3}{7}$

Exercice 2

Déterminer un équivalent le plus simple possible pour chacune des expressions suivantes :

$fx) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad$ en 0

$g(x) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad$ en $+\infty$

$h(x) = \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x - \cos 5x} \quad$ en 0

a) $fx) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad$ en 0

Quand $x \to 0$, $X = 2x + 5x^2 \to 0$

Or $\quad \ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$

$\Rightarrow \quad \ln(1 + 2x + 5x^2) \underset{x\to 0}{\sim} 2x + 5x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2x \quad$ car $x^2 = o(x)$ en 0

$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$

b) $g(x) = \ln(1 + 2x + 5x^2) \quad$ en $+\infty$

$g(x) = \ln\left(x^2(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} + 5)\right) = 2\ln x + \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} + 5\right)$

Quand $x \to +\infty$, $\ln x \to +\infty \quad$ et $\quad g_1(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} + 5\right) \to \ln 5$

$\Rightarrow \quad g_1(x) = o(\ln x)$

$\Rightarrow \quad g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x$

c) $\boxed{h(x) = \dfrac{\sin 3x}{\cos 4x - \cos 5x} \quad \text{en } 0}$

- On a $\quad \sin X \underset{X\to 0}{\sim} X$ et $\quad 3x \to 0$

  Donc $\quad \sin 3x \underset{x\to 0}{\sim} 3x$

- D'autre part $\quad 1-\cos X \underset{X\to 0}{\sim} \frac{X^2}{2}$

  Et $\quad \cos 4x - \cos 5x = (1-\cos 5x) - (1-\cos 4x)$

  avec $\quad 1-\cos 5x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(5x)^2}{2} = \frac{25}{2}x^2 \quad$ et $\quad 1-\cos 4x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(4x)^2}{2} = 8x^2$

  D'où $\quad \cos 4x - \cos 5x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{25}{2}x^2 - 8x^2 = \frac{9}{2}x^2$

  (Équivalents de même nature)

- Donc $\quad h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x}{9x^2/2} = \frac{2}{3x}$

Autre méthode

En utilisant $\quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$$\cos 4x - \cos 5x = -2\sin\frac{9x}{2}\sin\frac{-x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -2\frac{9x}{2}\cdot\frac{-x}{2} = \frac{9x^2}{2}$$

Exercice 3

Trouver les limites suivantes :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \text{ en } +\infty \qquad \frac{e^{x^2-x}}{2x^3+x^2} \quad \text{en } +\infty$$

$\boxed{u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \text{ en } +\infty}$

$u_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n = e^{v_n} \quad$ avec $\quad v_n = n\ln\dfrac{n+1}{n-1}$

$$\frac{n+1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{n-1} \to 1$$

Or $\quad \ln X \underset{X\to 1}{\sim} X-1$

$\Rightarrow \quad \ln\dfrac{n+1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n+1}{n-1} - 1 = \dfrac{2}{n-1} \sim \dfrac{2}{n}$

$\Rightarrow \quad v_n \sim 2$

$\Rightarrow \quad \lim v_n = 2$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^2$

$\boxed{\dfrac{e^{x^2-x}}{2x^3+x^2} \quad \text{en } +\infty}$

Posons $\quad c(x) = \dfrac{e^{x^2-x}}{2x^3+x^2}$

- On a $\quad 2x^3+x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2x^3$

  D'où $\quad c(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{x^2-x}}{x^3}$

- Posons $\quad c_1(x) = \dfrac{e^{x^2-x}}{x^3}$

$$ln(c_1(x)) = \ln\left(\frac{e^{x^2-x}}{x^3}\right) = x^2 - x - 3\ln x$$

  Or $\quad x = o(x^2)$ et $\ln x = o(x^2)$ en $+\infty \quad$ (Croissance comparée)

  Donc $\quad \ln(c_1(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

- Donc $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(c_1(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

  $\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2-x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} c_1(x) = +\infty$

- Or $\quad c(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\cdot c_1(x)$

  $\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$

Autre méthode : on poivait aussi appliquer directeent ln :

- En $+\infty, c(x) > 0$

  $\Rightarrow \quad \ln(c(x)) = x^2 - x + \ln(2x^3+x^2) = x^2 - x + \ln(x^3) + \ln(2+\frac{1}{x})$

- $x = o(x^2), \quad \ln(x^3) = 3\ln x = o(x^2) \quad$ (Croissance comparée)

  et $\quad \ln(2+\frac{1}{x}) \to \ln 2 = o(x^2)$

  Donc $\quad \ln(c(x)) \sim x^2$

  Attention : on ne peut passer à l'exponentielle avec des équivalents

- Or $\quad x^2 \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \ln(c(x)) \to +\infty \quad \Rightarrow \quad c(x) = \mathrm{e}^{\ln(c(x))} \to +\infty$

Exercice 4

On pose $\quad f(x) = (x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}$
et on note C_f sa courbe représentative

a) Monter que f est définie sur un intervalle $[a;b]$ à determiner

f est définie $\iff \sqrt{-x^2+2x+3}$ existe $\iff -x^2+2x+3 \geq 0$

$$-x^2+2x+3 = -(x^2-2x-3) = -(x+1)(x-3)$$

$f(x)$ existe $\iff -(x+1)(x-3) \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 3$

Donc $\quad D_f = [-1;3]$

b) f est-elle dérivable en a ? Peut-on en déduire quelque chose pour le graphe C_f ?

Rapport de Newton (taux d'accroissement) en -1 :

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}-0}{x+1}$$
$$= (x+1)\sqrt{-x^2+2x+3} \underset{x\to -1}{\to} 0$$

f est donc dérivable en -1 et $\quad f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$

C_f admet donc une tangente horizontale au point $(-1,\ f(-1)) = (-1,\ 0)$

c) f est-elle dérivable en b ? Peut-on en déduire quelque chose pour le graphe C_f ?

Rapport de Newton en 3^- :

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-3}$$

$D_f = [-1,3]$ donc $\quad x<3 \quad \Rightarrow \quad 3-x>0$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -(x+1)\frac{\sqrt{(x+1)(3-x)}}{3-x} = -(x+1)\frac{\sqrt{x+1}.\sqrt{3-x}}{3-x}$$
$$= \frac{-(x+1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$$

Qd $x\to 3^-$, $\begin{cases} -(x+1)\sqrt{x+1} \to -8 \\ \sqrt{3-x} \to 0^+ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} \to -\infty$

f n'est donc pas dérivable en 3

Et C_f admet une tangente verticale au point $(3,\ f(3)) = (3,\ 0)$

<u>Autre calcul :</u>

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{(x+1)\sqrt{-(x+1)(x-3)}}{x-3}$$
$$= \frac{(x+1)\sqrt{-(x+1)(x-3)}}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{-(x+1)(x-3)}}{\sqrt{-(x+1)(x-3)}}$$
$$= \frac{-(x+1)^2(x-3)}{(x-3)\sqrt{-(x+1)(x-3)}}$$
$$= \frac{-(x+1)^2}{\sqrt{-(x-1)(x-3)}}$$

Quand $x\to 3^-$, $-(x+1)^2 \to -16 < 0, \quad \sqrt{-(x-1)(x-3)} \to 0^+$

$\Rightarrow \quad \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} \to -\infty \quad \dots$

d) Déterminer les variations de f

Sur $]-1,\ 3[$, $-(x+1)(x-3)>0$, donc f est dérivable et

$$f'(x) = (x+1)'\sqrt{-x^2+2x+3} + (x+1)(\sqrt{-x^2+2x+3})'$$
$$= \sqrt{-x^2+2x+3} + (x+1)\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}$$
$$= \sqrt{-x^2+2x+3} + (x+1)\frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$
$$= \frac{(-x^2+2x+3)+(x+1)(-x+1)}{(\sqrt{-x^2+2x+3}}$$
$$= \frac{(-x^2+2x+3)+(-x^2+1)}{(\sqrt{-x^2+2x+3}}$$
$$= \frac{-2x^2+2x+4}{(\sqrt{-x^2+2x+3}}$$
$$= \frac{(x+1)(-2x+4)}{(\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

Pour $x \in]-1;3[, \quad x+1>0 \quad$ donc

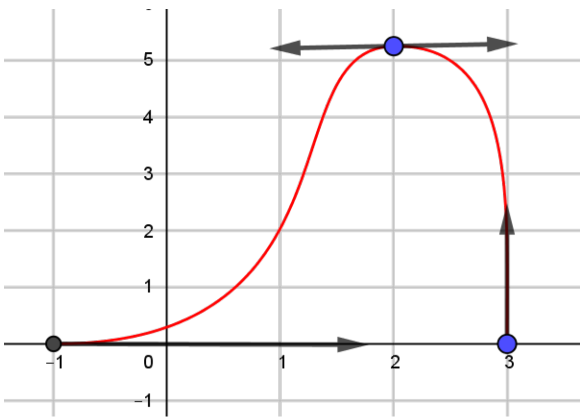
$f'(x)>0 \iff (x+1)(-2x+4)>0 \iff -2x+4>0$
$\iff x<2$

$f(2) = (2+1)\sqrt{-(2+1)(2-3)} = 3\sqrt{3}$

D'où le tableau de variations

x	-1		2		3
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	$\|\|$
f	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	0

e) Représenter graphiquement C_f (avec une échelle intelligente...)



Exercice 5

On donne $\quad 0,69 < \ln 2 < 0,7$

Soit la fonction f définie sur $]0,\ +\infty[$ par : $\quad f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$

1. Calculer la dérivée de f

pour $x > 0$, $\ln x$ existe et $x+1 \neq 0$, donc f est bien définie sur $]0, +\infty[$ et de plus C^1 comme quotient de fonctions usuelles

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x+1) - (\ln x)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{x}(x+1) - (\ln x)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$$

2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$
Etudier les variations de la fonction g et donner ses limites en 0 et $+\infty$

$$g(x) = x + 1 - x\ln x$$

g est définie et C^1 sur $]0; +\infty[$

$$g'(x) = 1 - (1.\ln x + x\tfrac{1}{x}) = -\ln x$$

$g'(x) > 0 \iff -\ln x > 0 \iff x < 1$

<u>Limites</u>

- En 0

  Quand $x \to 0^+$, $\quad x\ln x \to 0 \quad$ (croissance comparée)

  $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$

- En $+\infty$

  $$g(x) = 1 + x(1-\ln x)$$

  Quand $x \to +\infty$,

  $$\left.\begin{array}{r} 1-\ln x \to -\infty \\ x \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x(1-\ln x) \to -\infty$$

  $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

g(1)=2

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3. En déduire que la fonction g s'annule en un unique réel α et que $\quad \mathrm{e} < \alpha < 2\mathrm{e}$

- Sur $]0, 1]$, on a $g > 1 \quad$ Donc g ne s'annule pas
- sur $[1,\ +\infty[$

  g est continue et strictement décroissante. Donc elle réalise une bijection de $\quad I = [1,\ +\infty[\quad$ sur $\quad g(I) =]-\infty,\ 2]$

  Or $\quad 0 \in g(I)$

  Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$

- Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$

$g(\mathrm{e}) = \mathrm{e} + 1 - \mathrm{e}\ln\mathrm{e} = \mathrm{e} + 1 - \mathrm{e} = 1 > 0$

$g(2\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} + 1 - 2\mathrm{e}\ln(2\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} + 1 - 2\mathrm{e}(1 + \ln 2) = 1 - 2\mathrm{e}\ln 2$

Or $\quad 2 < \mathrm{e} < 3$

$\qquad 0,6 < \ln 2 < 0,7$

$\Rightarrow \quad 1,2 < 2\mathrm{e}\ln 2 < 2,1$

$\Rightarrow \quad g(2\mathrm{e}) < 0$

$\qquad g(\mathrm{e}) > g(\alpha) > g(2\mathrm{e})$

$\Rightarrow \quad \mathrm{e} < \alpha < 2\mathrm{e}$ $\quad$ car g décroissante sur $[1; +\infty[$

4. En déduire le tableau de signe de g puis le tableau de variations de f (en fonction de α)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2} \qquad \text{avec } x(x+1)^2 \text{ sur }]0; +\infty[$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0	1		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
f	$-\infty$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Remarque : $\quad f(1) = 0$

5. Montrer que $\quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$

On a $\quad g'(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + 1 - \alpha\ln(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(\alpha) = \dfrac{1+\alpha}{\alpha}$

$$\Rightarrow \quad f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} = \frac{1}{\alpha}$$

6. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

- En 0

Quand $x \to 0^+$,

$$\left.\begin{array}{r} \ln x \to -\infty \\ x + 1 \to 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

- en $+\infty$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Quand $x \to +\infty$

$$\frac{\ln x}{x} \to 0 \quad \text{(croissance comparée)}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \to 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

7. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en 1

$$f'(x) = \frac{x + 1 - x\ln x}{x(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad f(1) = 0$$

Donc la tangente en 1 a pour équation : $\quad y = \dfrac{1}{2}(x - 1) + 0$

8. Tracer une allure possible de C_f (On choisira des échelles pertinentes et pas identiques pour l'axe des x et l'axe des y). On donne $\alpha \simeq 3,6$