Musée des horreurs

Exo 1

$\boxed{\begin{array}{l}\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \cdots = \frac{4}{5} \\ \text{Or } a \in [0;\pi] \text{ donc } \sin a > 0\end{array}}$

Cette rédaction est totalement illogique :

Vous supposez (sans l'écrire) d'abord que $\sin a$ est positif pour pouvoir écrire
$\sin a = +\sqrt{1-\cos^2 a}$
et ENSUITE vous justifiez que $\sin a$ est positif. (Ce qui est assez évident pour le coup puisque $\frac{4}{5}$ est bien positif !)

Donc cette rédaction établit la chose suivante :
si $\sin a$ est positif, alors il est bien positif.

Pour pouvoir écrire que $\sin a = +\sqrt{1-\cos^2 a}$, il faut D'ABORD prouver que $\sin a$ est bien positif.

Faire un raisonnement mathématique, c'est respecter un ORDRE logique.

$\boxed{\sin(2\arctan x) \text{ existe} \quad \text{ssi} \quad 2\arctan x \in [-\pi/2, \pi/2]}$

Non, car la fonction $x \mapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$

Vous confondez ici

- La bonne vieille fonction sinus qui est définie sur $\mathbb{R}$
- et sa **restriction** qui établit une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$ et dont la réciproque est $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

Et donc la condition $x \in [-\pi, \pi/2]$ pour $\sin x$ n'intervient que qnad on veut utiliser arcsin :
$x = \arcsin y \iff \sin x = y \quad \text{pour} \quad \underline{x \in [-\pi/2, \pi/2]} \text{ et } y \in [-1, 1]$

Ici, pas de arcsin donc pas de condition *a priori* sur x pour pouvoir écrire $\sin x$

$\boxed{\tan(2\arctan x) = 2x}$

Cela se déduit de la célèbre formule $\tan(2\alpha) = 2\tan\alpha$ (qui est, bien entendu, FAUSSE).

$\boxed{\text{Posons} \quad \alpha = 2\arctan x}$

Ce n'est pas vraiment une horreur. Plutôt une maladresse.
En effet, cela ne donne que la relation suivante :
$\frac{\alpha}{2} = \arctan x \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\alpha}{2} = x$
ce qui n'est pas très maniable.

Il est beaucoup plus judicieux de poser : $\alpha = \arctan x$ qui donne $\tan\alpha = x$

Remarque : $\alpha = \sin A = \dfrac{8\sqrt{2}-3}{15}$ $\boxed{\text{On a bien} \quad -1 \leq \alpha \leq 1}$

Certains ont tenu à écrire $-1 \leq \alpha \leq 1$ (souvent sans le démontrer !)

Ce n'est pas faux. Mais c'est inutile a priroi, car $\alpha = \sin A$. Donc, par rporiété de la fonction sinus, on a <u>nécessairement</u> $-1 \leq \alpha \leq 1$

Tout au plus, cela peut-être une vérification que les calculs ne sont pas totalement faux (ce qui n'est pas inutile).

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} & \dfrac{2x}{1+x^2} \\ \text{ou} & \dfrac{-2x}{1+x^2} \end{cases}}$$

Certains arrivaient à ce résultat en utilisant la deuxième méthode (cf corrigé)
Ce résultat n'est absolument pas satisfaosant : lequel est vrai. Par exemple, pour $x = 1$, a-t-on $f(x) = 1$ ou bien $f(x) = -1$
Une fonction peut tout à fait être définie de cette façon, par exemple quand on définit la valeur absolue.
Mais dans ce cas, il faut impérativement préciser, <u>en fonction de x</u>, dans cquelle cas on utilisela première formule ou bien la seconde.
Par exemple (cela n'a prien à voir avec la solution exacte) :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{-2x}{1+x^2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Sinon, la définition donnée n'a aucun sens.

Exo 2

> En $+\infty$:
> $g(x)=\ln\left(5x^2(\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x}+1)\right)=2\ln x+\ln 5+\ln\left(\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x}+1\right)$
> Or $\quad \ln(1+X)\underset{x\to 0}{\sim}X \quad$ et $\quad \frac{1}{5x}+\frac{2}{5x}\to 0$ qd $x\to+\infty$
> $\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x}+1\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x}$
> Jusqu'ici tout allait bien
> $\Rightarrow \quad f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}2\ln x+5+\frac{1}{5x}+\frac{2}{5x}$

La dernière étape est fort malheureuse.

En effet, on a additionné des équivalents. Ce qui est interdit sauf dans deux cas particuliers que je rappelle :

- Un des terme négligeable devant l'autre : $f=o(g) \quad \Rightarrow \quad f+g\sim g$
- Deux équivlaents de même nature de somme non nulle : $f\sim\alpha h$ et $g\sim\beta.h$ avec $\alpha+\beta\neq 0 \quad \Rightarrow \quad f+g\sim(\alpha+\beta).h$

En dehors de ces deux cas, on ne peut faire d'addition avec les équivalents : $f\sim g$ N'IMPLIQURE PAS $f+h\sim g+h$

Ce n'est pas faute de vous l'avoir répété à longueur d'exercices.
Ou bien vous n'avez pas retravaillé les exercices
Ou bien vous ne vous étes pas posé la question de savoir pourquoi je me compliquais la vie
Faire des maths, ce n'est pas reproduire mécaniquement plus ou moins bien des exercices, mais c'est aussi, parfois, réfléchir, un peu...
Et quand on donne des règles de calculs et en particulier des interdictions, ce n'est pas pour le plaisir de vous embêter. Certes il y a bien une certaine jouissance à torturer les élèves en leur compliquant la vie, sinon quel serait l'intérêt de devenir prof ? Mais cela n'explique pas tout. Si on interdit certaines choses, c'est parce que cela ne marche pas tout le temps. Or le but en mathématiques, n'est pas de faire des choses qui marchent parfois. Et si on a de la chance, on peut tomber sur le bon résultat. Quand on construit un avion, il vaut mieux qu'il ne fonctionne pas que sur un coup de chance.

Ou bien certains semblent appliquer le principe Shadock : si une expérience n'a que 99% de chance de marcher, on se dépêche de se tromper 99 fois. Pour se faire une idée de la logique imparable des Shadocks :

`https://youtu.be/1Duiup2tWKA?si=X2QfX9JXhwRqt11l`

> $\ln(1+2x)\sim\ln 1$

Sachant que $\quad \ln 1=0$ cela donne $\quad \ln(1+2x)\sim 0 \quad$ l'horreur absolue

> $\ln(Y)\underset{+\infty}{\sim}Y-1$

Un équivalent en 1 n'a aucune chance de marcher en $+\infty$

> $\cos 4x-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-(4x)^2}{2}=-8x^2$
> $\Rightarrow \quad \cos 4x\underset{x\to 0}{\sim}1-8x^2$

De nouveau il est interdit, sauf exception, d'additionner des équivalents
En tant que résultat d'équivalents, $\quad 1-8x^2 \quad$ n'a ni intérêt ni réelle signification.
En effet on a par exemple $1-8x^2\underset{x\to 0}{\sim}1+2x \quad$ (puisque $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-8x^2}{1+2x}=1$
Donc le deuxième terme n'a aucune signification car il est négligeable devant 1
La suite du raisonnement est tout aussi fausse :

> $\cos 4x\underset{x\to 0}{\sim}1-8x^2 \quad$ et $\quad \cos 5x\underset{x\to 0}{\sim}1-\frac{25}{2}x^2$
> $\Rightarrow \quad \cos 4x-\cos 5x\underset{x\to 0}{\sim}(1-8x^2)-(1-\frac{25}{2}x^2)$

Ici on additionne des équivalents qui NE SONT PAS DE MEME NATURE, ce qui STRENG VERBOTEN.

Le raisonnement est donc faux (quand bien même le résultat est juste).

> $1+2x+5x^2\underset{x\to+\infty}{\sim}5x^2$
> $\Rightarrow \quad \ln(1+2x+5x^2)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(5x^2)$

Streng Verboten : on ne pas appliquer de fonctions à un équivalent. $f(x)\sim g(x)\not\Rightarrow h(f(x))\sim h(g(x))$

En particulier

$f(x)\sim g(x)\not\Rightarrow \ln f(x)\sim\ln g(x)$

et $\quad f(x)\sim g(x)\not\Rightarrow e^{f(x)}\sim e^{g(x)}$

La seule exception : on peut élever à une puissance fixée (indépendante de la variable) :

$$f(x) \sim g(x) \Rightarrow (f(x))^a \sim (g(x))^a \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

Mais cela ne marche pas par exemple avec la puissance x

$$f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow (f(x))^x \sim (g(x))^x$$

Exo 3

$$\boxed{\text{Quand } n \to +\infty, \frac{n+1}{n-1} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \to 1}$$

Non. Quand cela frétille (=dépend de la variable) à la puissance et sous la puissance, c'est par principe une forme indépterminée. On ne réfléchit pas, et on passe direct à la forme exponentielle. Et ensuite, on recommence à réfléchir. . .,

$$\boxed{x^2 - x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \quad \Rightarrow \quad e^{x^2-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2}}$$

Le RAISONNEMENT est faux (on n'applique pas de fonction, en particulier l'exponentielle à un équivalent). Mais le RÉSULTAT l'est également. En effet :

$$\frac{e^{x^2-x}}{e^{x^2}} = e^{-x} \to 0 \quad \text{qd } x \to +\infty$$

En fait on a $e^{x^2-x} = o(e^{x^2})$ en $+\infty$ (et cela ne sert à rien ici).

Plusieurs m'ont fait cet admirable calcul :

$$\boxed{\frac{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2-1}}$$

C'est parfaitement exact . . .et parfaitement inutile

Mon esprit subtil et raffiné s'est demandé la raison d'être d'un tel calcul. A l'issue d'une profonde et intense méditation, plusieurs hypothèses se sont présentées à mon cerveau fertile quoique qu'embrumé, hypothèses que dans ma sublime magnanimité et ma bonté adamantine je me fais une joie de vous partager :

- Vous étiez en train de vous ennuyer, alors pourquoi ne pas écrire cela (ou autre chose). Dans tous les cas, cela occupe
- Le sujet vous semblait un peu trop simple. Il s'agissait donc d'essayer de le corser un peu.
- En adeptes enamourés des Shadock vous vouliez mettre en application un de leurs grands principes

  « **Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?** »
- Ou bien , dans un réflexe pavlovien, à la vue d'une fraction avec le signe moins, votre esprit fiévreux s'est jeté avec exultation sur la méthode de l'expression conjuguée (en se disant que cela ne fait pas de mal).
  Certes, l'expression conjuguée est en soi une bonne idée. Cela ne signifie pas qu'il faut la mettre en œuvre partout et en tout temps (A moins que, autre hypothèse, vous fassiez le concours de celui qui utilisera le plus l'expression conjuguée dans sa copie. Quand j'étais bête et élève en prépa - maintenant je ne suis plus élève en prépa - nous cherchions bien à caser le mot "moissonneuse-batteuse" dans notre devoir de français).

Or l'expression conjuguée est utile surtout pour se débarrasser d'une racine carrée là où elle est gênante. Or ici pas de racine carrée (sauf à écrire $n-1 = n-\sqrt{1}$ ce qui serait assez vicieux...) donc pas d'utilité pour l'expression conjuguée.

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 - x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \text{ et } 2x^3 + x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x^3 \\ \text{On se retrouve alors avec } \quad \dfrac{e^{x^2}}{2x^2} \end{array}}$$

Ce « On se retrouve alors avec » est admirable. Le seul problème, c'est qu'on ne voit pas quel est le rapport, la relation entre la fonction de départ et cette nouvelle fonction. Et cette question est FONDAMENTALE. Si on ne sait pas quelle est leur relation, on ne peut rien déduire du comportement de la première fonction d'après le comportement de la seconde fonction.

Faire des maths, c'est créer des relations entre différents objets. Pas de relations, pas de maths. . .

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x^3}}$$

Ici on a bien une relation. Mais qui n'a malheureusement aucun sens :

- A gauche nous avons une limite pour $x \to +\infty$ donc un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ (cad un élement de $\overline{\mathbb{R}}$) qui **ne peut pas dépendre de** x
- A droite une expression **qui dépend de** x

Donc l'égalité n'a pas de sens.

A noter : $\boxed{\text{Quand on fait passer } x \text{ à la limite le résultat ne dépend jamais de } x}$

Une autre variante

$$\boxed{\frac{e^{x^2}}{2x^3+x^2} \to \frac{e^{x^2}}{2x^3}}$$

Cela non plus n'a pas de sens

Un classique : « on applique ln » :

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x^2} \quad \text{On applique ln :} \quad \frac{\ln(e^{x^2})}{\ln(2x^2)}}$$

C'est joli. Le seul problème est que la seconde fonction n'a **aucun rapport** avec la première...

$$\boxed{X \to +\infty,\ Y \to +\infty \quad \Rightarrow \quad X^2 = o(e^Y) \quad \text{par croissance comparée}}$$

Cela ne marche pas, car on ne peut utiliser les propriétés usuelles quand les variables sont <u>différentes</u>

Pour le voir, il suffit de prendre $Y = \ln X$ dans ce cas : $e^Y = X$ et on voit bien alors que c'est faux.

$$\boxed{x^2 - x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{x^2-x} \to +\infty \quad \textit{par continuité de exponentielle}}$$

? ? ? ? L'implication est correcte, mais la justification est fantaisiste.

La continuité ne s'applique qu'en une valeur finie d'une fonction. La continuité de l'exponentielle en $+\infty$ n'a aucun sens.

Pour une fonction f définie en a :

$$\begin{aligned} & f \text{ est continue en } a \\ \iff & \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\ \iff & \text{quand } x \to a,\ f(x) \to f(a) \end{aligned}$$

Donc par exemple pour la fonction exponentielle en 2 :

$$\lim_{x\to 2} e^x = e^2$$

Cad : quand $x \to 2, e^x \to e^2$

Donc en particulier on peut écrire :

$$\lim v_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^2 \quad \underline{\text{car l'exponentielle est continue en 2}}$$

Petit rappel

§ Limites de f :

- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff f$ est continue en a
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \iff C_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff C_f$ admet une tangente verticale d'équation $x = a$ en a

§ Limites du taux d'accroissement :

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$ (finie) $\iff f$ est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ et C_f admet une tangente T_a d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ passant par par $(a,\ f(a))$
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff f$ est dérivable en $a \iff C_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$ passant par $(a,\ f(a))$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff C_f$ admet une tangente verticale d'équation $x = a$ passant par $(a,\ f(a))$

Exo 4

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to-1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}-0}{x+1} \\ &= \lim_{x\to-1} \sqrt{-x^2+2x+3} = 0 \end{aligned}}$$

Je rappelle qu'on ne tartine pas de limite partout tant qu'on ne sait pas si elles existent ou pas. C'est un principe élémentaire et de bon sens : on ne fait pas de calcul sur un objet qui n'existe pas nécessairement. (Le seul cas où on peut le faire, c'est quand on fait un raisonnement par l'absurde, car alors on peut supposer l'existence d'un objet mathématique donné).

Donc on fait les calculs jusqu'à ce qu'on trouve une forme dont on peut déterminer la limite.

Il s'agit là d'entrer dans un apprentissage d'une certaine rigueur indispensable pour progresser en maths. Sinon vous restez dans le flou, l'indécis, le flasque, le presque vrai qui est toujours faux. Ce n'est pas une simple marotte de ma part. Il y a un vrai enjeu en première année d'entrer dans cette démarche. Certes je sais que cela demande un véritable effort de votre part car on ne vous a pas habitué en général à ces exigences. On se contentait d'approximations plus ou moins exactes.

Rédiger de façon rigoureuse, ce n'est pas non plus inonder le correcteur d'un flot scripturaire ininterrompu. Rédiger c'est donner exactement et au bon moment les arguments nécessaires à la progression du raisonnement. Et comme vous êtes tous des mathématiciens brillants et accomplis, je comprends tout-à-fait que vous ne teniez aucun compte des consignes.

Mais comme je me lasse parfois d'avoir à répéter des choses sans que cela soit suivi d'effet, je sanctionne !

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\\ &=\frac{(x+1)\sqrt{-(x+1)(x-3)}}{x-3}\\ &=\frac{(x+1)\sqrt{-x-1}\sqrt{x-3}}{x-3}\end{aligned}}$$

Pas de chance, car $x\in]-1,3[$ donc $x-3<0$ d'où $\sqrt{x-3}$ n'existe pas et il en est de même pour $\sqrt{-x-1}$

Donc ce calcul n'a plus de sens.

Ci-dessous, la solution pour faire un peu et un peu pas !

$$\boxed{\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}-0}{x+1}}$$

On met une limite puis plus de limite. Donc cela n'a aucun sens.

$$\boxed{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{(x+1)\sqrt{-x^2+2x+3}-0}{x+1}}$$

C'est une égalité et pas une équivalence. Les signes mathématiques sont censés tout de même avoir un minimum de sens...

Utilisez donc les différents symboles à bon escient. Une égalité $=$ n'est pas une équivalence logique $\Longleftrightarrow$, n'est pas une équivalence de fonction ou de suites : $\sim$.

Comme on utilise un nombre limité de mots et de symboles, il y a possibilité a priori de confusion. C'est là où il faut être clair dans ce qu'on raconte. (Ce problème de polysémie se rencontre aussi dans toutes les langues naturelles : "bois" désigne un matériau, ou bien une petite forêt, ou bien se rapporte au verbe boire. . .).

Le symbole le plus polysémique en maths est bien sûr le signe « = » : une égalité de nombre n'est pas une égalité d'ensemble, n'est pas une égalité de fonctions, n'est pas une égalité de matrices, etc.

$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ si elle admet une limite finie en } a}$

Bah non. C'est le taux d'accrroissement de f en a qui doit avoir une limite finie.

$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ si elle admet une limite finie en } a}$

Exo 5

$\boxed{g \text{ est strictement décroissante car dérivable}}$

?????

$\boxed{g \text{ est continue donc dérivable}}$

?????

A propos du graphe de f, il fallait recueillir les diffrentes données de l'exercice :

- Bien sûr, les variations de la fonction
- Situer un point $\alpha\simeq 3,6$ sur l'axe des x et $1/\alpha\simeq 0,3$ sur l'axe des y
- Faire apparaître le sommet de la courbe en l'indiquant par un zigouigoui horizontal ($\leftrightarrow$)
- Évidemment choisir une échelle qui n'écrase pas le dessin, donc une échelle différente sur l'axe des x et des y (A ce sujet, certain n'ont pas mis d'échelle du tout, ce qui simplifie tous les problèmes)
- Tracer la tangente avec la bonne pente
- Une fois tout ce la fait, on peut enfin tracer la courbe (en s'arrangeant pour que la tangente soit tangente à la courbe ! C'est un peu fait pour cela. . .