1 Calcul dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathbb{C}^n$

- Addition (opération interne)
  $(x_1,\ y_1,\ z_1)+(x_2,\ y_2,\ z_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$
- Produit par un scalaire (opération externe)
  $a.(x_1,\ y_1,\ z_1)=(a.x_1,\ a.y_1,\ a.z_1)$
- Vecteur nul : $(0,\ 0,\ 0)=\vec{0}$

Exemple 1 $u=(2,\ 3,\ 5)$ et $v=(3,\ -5,\ 7)$ Calculer $2u-3v$

Définition 1 : Combinaison linéaire

Soient $u,\ v,\ w\in\mathbb{R}^n$

u est combinaison linéaire de $(v,\ w)$

$\iff$ $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=a.v+b.w$

2 Systèmes

Exemples

- $\begin{cases} 3x+2y=5\\ 2x-y=3\\ x+3y=1\end{cases}$ C'est un système de 3 équations linéaires à deux inconnues (x,y) Une solution de ce système est un élément $(x,\ y)$ de $\mathbb{R}^2$
- $\begin{cases} 3x+2y=0\\ 2x-y=0\\ x+3y=0\end{cases}$

C'est le **système homogène** associé au système précédent.

Propriété 1 : Système homogène

Un système homogène admet toujours **au moins** la solution nulle

Définition 2 Opérations élémentaires

- Echange des lignes L_i et L_j : $L_i\leftrightarrow L_j$
- Ajout de $\lambda.L_j$ à L_i pour $i\neq j$ $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$
- Multiplication de L_i par $\lambda\neq 0$. $L_i\leftarrow\lambda L_i$

Définition 3 : Systèmes équivalents

Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Propriété 2 : Systèmes équivalents

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Propriété 3 : Nombre de solutions

Un système d'équations linéaires admet
- ou bien aucune solution,
- ou bien une unique solution
- ou bien une infinité de solutions

Un système est dit incompatible s'il n'admet aucune solution.

Par exemple, un système linéaire ne peut pas admettre seulement deux solutions.

2.1 Systèmes triangulaires

Exemple 1

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=5\\ 5y+z=6\\ 7z=8\end{cases}$$

Ce système est triangulaire de pivots 2, 5 et 7

Propriété 4 : Système triangulaire

Un système triangulaire admet une solution unique si et seulement si tous ses pivots sont non nuls (ou encore si aucun de ses pivots n'est nul)

En effet, dans ce cas, on peut trouver les inconnues en « remontant »dans le système.

Le système $\begin{cases} 2x+3y-4z=5\\ ay+b.z=6\\ (a-1)z=8\end{cases}$

Ce système est triangulaire si et seulement si ....

2.2 Système avec infinité de solutions

Les solutions s'expriment sous la forme :

« Solution Particulière (SP) + solutions du système homogène associé »

2.3 Matrices

Définition 4 : Matrice échelonnée

Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi
- À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Pivots : 1, 5,8

Définition 5 : Matrice échelonnée réduite par lignes

Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemple : $N = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} & 4 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété 5

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Propriété 6 : Rang de la matrcie

On appelle rang d'une matrice le nombre de ligness non nulles del'echelonnée réduite associée

$\text{rg}(M) = \dots \quad \text{rg}(N) = \dots,$

3 Calcul matriciel

Définition 6

Une matrice $(n,\ p)$ est un tableau de nombres

$$A = (a_{i,\ j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$$

de n lignes et p colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,\ 1} & \cdots & a_{1,\ j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,\ j} & \cdots & a_{i,\ p} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,\ j} & \cdots & a_{n,\ p} \end{pmatrix}$$

Le coefficient $a_{i,\ j}$ est situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice $(2,\ 3)$

On a $m_{1,2} = 2 \quad m_{2,3} = 6$

Définition 7 : Vocabulaire

- On note $\mathcal{M}_{(n,\ p)}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.
- Une matrice $(1,\ p)$ est appelée une matrice ligne
- Une matrice $(n,\ 1)$ est appelée une matrice colonne.
- Une matrice $(n,\ n)$ est appelée une **matrice carrée d'ordre** n

Définition 8 : Somme et produit par un scalaire

Soit $A = (a_{i,j}),\ B = (b_{i,j})$ deux matrices $(n,\ p)$
On note $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$
Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $\alpha.A = (\alpha.a_{i,j})$

Produit de matrices

Exemple : la formule magique est toujours « ligne-colonne »

Prenons $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Appelons C la matrice produit : $C = AB$

Si on « multiplie la ligne L_1 de A avec la colonne C_2 de B on obtient le coefficient $c_{1,2}$ de C de la façon suivante : $c_{1,2} = 5 \times 2 + 6 \times 4 = 34$

On complète pour les différentes cases :

$$C = \begin{pmatrix} 5\times1+6\times3 & 5\times2+6\times4 \\ 7\times1+8\times3 & 7\times2+8\times4 \\ 9\times1+10\times3 & 9\times2+10\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \\ 39 & 58 \end{pmatrix}$$

Définition 9 : Produit de matrices

Soit $A = (a_{i,\ j})$ une matrice $(n,\ p)$ et $B = (b_{j,\ k})$ une matrice $(p,\ q)$
Alors la matrice $A.B = C = (c_{i,k})$ est une matrice $(n,\ q)$ définie par :

$\forall i \in [[1,\ n]],\ \forall k \in [[1,\ q]],\quad c_{i,k} =$ ....

Propriété 7 : Propriétés

$\forall A, B, C$ matrices, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, quand les produits existent, on a :

- $A.(B+C) = A.B + A.C \quad (B+C).A = B.A + C.A$
  (distributivité du produit par rapport à la somme)
- $A.(B.C) = (A.B).C$ (associativité)
- $\lambda.(A.B) = (\lambda.A).B = A.(\lambda.B)$

Définition 10

On dit que deux matrices A et B commutent si : $AB = BA$

Attention

- En général, $A.B \neq B.A$
- En général, $A.B = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$

4 Matrices carrées

4.1 matrices particulières

Définition 11 : Matrices diagonales

matrice diagonale : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

$(i \neq j \quad \Rightarrow \quad a_{i,\ j} = 0)$

Définition 12 : matrices triangulaires

- Matrice triangulaire supérieure : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$

  $(i > j \quad \Rightarrow \quad a_{i,\ j} = 0)$
- Matrice triangulaire inférieure : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

  $(i < j \quad \Rightarrow \quad a_{i,\ j} = 0)$

Définition 13 : Matrices identité

Matrice unité (ou identité) d'ordre 3 : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \forall i,\ j \in [[1,n]], \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad a_{i,j} = 0 \\ \forall i \in [[1,n]], \quad a_{i,i} = 1 \end{cases}$$

Définition 14 : symbole de Kronecker

On note $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Définition 15 : avec le symbole de Kronecker

$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Propriété 8

- Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) alors le produit $A.B$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure)
- Le produit de deux matrices diagonales et une matrice diagonale
- Deux matrices diagonales commutent

Propriété 9

I_n est l'élément neutre pour la multiplication des matrices carrées :

$$\forall N \in \mathcal{M}_{(n,\ p)}(\mathbb{K}), \quad N.I_p = I_n.N = N$$
$$\forall M \in \mathcal{M}_{(n,\ n)}(\mathbb{K}), \quad M.I_n = I_n.M = M$$

4.2 matrice inversible

Définition 16 : Matrice inversible

Soit A une matrice carrée d'ordre n
A est inversible si et seulement si il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que :

$$A.B = B.A = I_n$$

On note alors $B = A^{-1}$

Propriété 10 Condition suffisante d'inversibilité

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
S'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que

$$A.B = I_n \quad \text{(ou bien} \quad B.A = I_n)$$

Alors A et B sont inversible et $B = A^{-1}$ et $A = B^{-1}$

Propriété 11

- Soit A un matrice inversible.
  Alors $(A^{-1})^{-1} = A$
- Soient A et B deux matrices inversibles d'ordre n.
  Alors $A.B$ est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Soit A une matrice **inversible** d'ordre n.
  Soient M_1, M_2 deux matrices (n, p) et N_1, N_2 deux matrices (q, n)
  $$A.M_1 = A.M_2 \iff M_1 = M_2$$
  $$N_1.A = N_2.A \iff N_1 = N_2$$

Remarquer que l'implication
$$M_1 = M_2 \Rightarrow AM_1 = AM_2$$
est triviale et toujours vraie (même si A n'est pas inversible)

Remarque importante :
On doit toujours multiplier les deux membres de l'égalité du même côté (à droite ou à gauche)

- Par exemple si $AM_1 = M_2A$ avec A inversible
  Cela n'implique absolument pas que $M_1 = M_2$
- De même $M_1 = M_2$ n'implique pas $AM_1 = M_2A$
- On peut par contre écrire par exemple :
  Pour A inversible
  $$AM_1 = M_2A \iff M_1 = A^{-1}M_2A$$

2.3 Résolution de système

Soit un système de 3 équations à trois inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x & +a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x & +a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \\ a_{3,1}x & +a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\iff \quad AX = B$
Ce système admet une solution unique si et seulement si A est inversible
Et dans ce cas : $AX = B \iff X = A^{-1}B$

3 pivot de Gauss

Exemple :

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible et si oui donner son inverse.

4 Transposée

Définition 4 : Transposée

Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$ une matrice (n, p)
On note $B = {}^tA = A^T$, la matrice transposée de A qui est une matrice (p, n) définie par $b_{i,ji} = \ldots$

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B = {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Il suffit d'échanger les lignes et les colonnes
Par exemple : $b_{2,1} = 2 = a_{1,2}$

Propriété 8

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,$
  $${}^t(\lambda.A + \mu.B) = \ldots$$
  (On dit que la transposition est une application linéaire)
- $(A^T)^T = \ldots$

Propriété 9

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})^2,$

$${}^t(A.B) = \ldots$$

Propriété 10

A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible

On a alors : $({}^tA)^{-1} = \ldots$

Définition 5

Une matrice carrée M est
- symétrique ssi : …
- antisymétrique ssi : …

Exemples : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

A est symétrique et B est antisymétrique.

5 Binôme de Newton & family

Propriété 11 matrices commutant

Soient A et B deux matrices qui commutent (c'est-à-dire telles que $AB = BA$). On a alors : $\forall (n,\ p) \in \mathbb{N}$,

$$A^nB^p = B^pA^n$$
$$(AB)^n = A^nB^n$$

Propriété 12

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n :

On a alors $(A+B)^2 = \ldots$

Si A et B commutent, on a alors : $(A+B)^2 = \ldots$

Propriété 13 : Identités remarquables

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n qui commutent . On retrouve alors les différentes identités remarquables connues :

- $A^2 - B^2 = \ldots\ldots$
- $A^3 - B^3 = \ldots\ldots$
- $A^{n+1} - B^{n+1} = \ldots\ldots$
- $A^{n+1} - I = \ldots\ldots$

Propriété 14 : Binôme de Newton

Soient $A,\ B$ deux matrices carrées qui **commutent**. Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^kB^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$$

avec la convention : $A^0 = B^0 = I$

elle est en tout point identique à la démonstration pour les réels en utilisant en plus que $BA^k = A^kB$

Définition 6

- Matrices nilpotente : $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 0$
- Matrice idempotente : $\exists n \in \mathbb{N}^*, A^n = A$

Exemple 1

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + A \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \geq 2$ et en déduire B^n

Exemple 2

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{On pose } U \text{ telle que } B = I + U$$

Calculer U^n puis B^n pour $n \geq 2$