Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) On pose $A = (a_{i,j})$. Déterminer $a_{1,2},\ a_{2,1}$
A quels coefficients correspondent 5, -6, 3 ?
2) On donne la matrice $D = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(3,4)}(\mathbb{R})$.
Écrire D sachant que $d_{i,j} = i - 2j$
3) Parmi les produit suivants lesquels existent ?
$A.B,\ A.C,\ C.A,\ C.X,\ C^T.A$
4) Calculer $A.B,\ B.A,\ A^T.B^T$ Que remarque-t-on ?
5) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer $M.I_2$ et $I_2.M$ Que remarque-t-on ?
6) On pose $D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
Calculer $D.E$ et $E.D$ Que remarque-t-on ?
7) On pose $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Calculer $F.G$ et $G.F$ Que remarque-t-on ?
8) Calculer $A.X,\ {}^tX.B,\ X.{}^tX,\ {}^tX.X, C.U, C.I, I.C$

Exercice 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ces matrices sont-elles inversibles ? Calculer le cas échéant leur inverse.

Exercice 3 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A_1 = E_1 A$ Quelle transformation a-t-elle effectuée sur les lignes de A ? Calculer E_1^{-1} Quelle est la transformation associée par cette matrice ?
2) Donner la matrice E_2 telle que $A_2 = E_2.A$ est obtenue par la transformation $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$
3) Trouver E_3 associée à la transformation $\begin{cases} L_2 \leftarrow -L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow 3L_1 + 5L_3 \end{cases}$
Déterminer $(E_3)^{-1}$ et la transformation associée.

Exercice 4
$A \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle inversible ? Calculer le cas échéant son inverse.
2) Même question avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
3) Soit le système linéaire (S) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$
Écrire le système suivant sous la forme matricielle $BX = Y$ où X et Y sont des matrices-colonnes. En déduire les solution de (S)

Exercice 5
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calculer M^2 puis résoudre l'équation : $a.M^2 + b.M + c.I = 0$ d'inconnues $(a,\ b,\ c)$. (La famille (I, M, M^2) est-elle libre ?)
b) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M.(\alpha.M + \beta.I) = I$
En déduire que M est inversible et donner M^{-1}
c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n,\ b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M^n = a_n M + b_n I$ et exprimer $(a_{n+1},\ b_{n+1})$ en fonction de $(a_n,\ b_n)$.
En déduire une expression de a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et a_n.
d) Calculer alors a_n puis b_n en fonction de n.
En déduire l'expression de M^n.
e) Montrer que cette expression est encore valable pour $n = -1$.