Exercice 1 20 op 545

Soit la suite u, définie par son premier terme $u_0 = 1/2$

et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1) Monter que, pour tout entier naturel n, il existe deux entiers p_n et q_n tels que $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ et : $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

   où A est une matrice carrée réelle d'ordre 2, indépendante de n.

2) On pose $A = I + B$.
   Pour $n \geq 1$, calculer B^n puis A^n.
   En déduire l'expression de $(p_n,\ q_n)$ puis de u_n en fonction de n.

3) La suite u est-elle convergente ? Le cas échéant, donner sa limite ℓ et un équivalent simple de $u_n - \ell$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) <u>1ère méthode</u>
   a) Exprimer B en fonction de A et I et calculer A^2en fonction de A
   b) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (u_n, v_n) tel que $B^n = u_n A + v_n I$
      et exprimer $(u_{n+1},\ v_{n+1})$ en fonction de (u_n, v_n)
   c) Exprimer alors u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n (On doit arriver à : $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$)
   d) Calculer alors les expression de u_n et v_n en fonction de n.
      En déduire alors la forme explicite de B^n
   e) Vérifier le résultat pour $n = 2$

2) <u>2ème methode</u>
   a) Déterminer $A^n,\ n \geq 1$. Exprimer B en fonction de A et I
   b) En déduire B^n en utilisant le binôme de Newton. Vérifier le séurltat obtenue pour $n = 1,\ n = 2$

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = A - 3I \text{ A Terminer}$$

1) Déterminer $A^n,\ n \geq 1$. Exprimer B en fonction de A et I
2) En déduire B^n en utilisant le binôme de Newton. Vérifier le séurltat obtenue pour $n = 1,\ n = 2$

Exercice 4 a) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système homogène suivant

$$\begin{cases} -mx + 4t = 0 \\ -my + 3z = 0 \\ 2y - mz = 0 \\ x - mt = 0 \end{cases}$$

a-t-il d'autres solutions que la solution nulle ?

b) Résoudre alors le système pour chaque valeur de m ainsi obtenue.

Exercice 5 1 op 571

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Pour quelles valeurs du nombre complexe a la matrice M est-elle inversible ? Calculer M^{-1} lorsqu'elle existe.

Exercice 6

Résoudre pour tout $p \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} 2px + y = 1 \\ 2x + py = p \end{cases}$ b) $\begin{cases} : x + py + 2z = 1 \\ px + y + 2z = p \\ x + 2py + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} px + py + 4z = 1 \\ 2x + y + pz = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + py + 6z = 6 \\ -x + 3y + (p-3)z = 0 \end{cases}$