Exercice 1
Résoudre les équations différentielles suivantes. Ne pas oublier de préciser sur quel intervalle on résout l'équation.

(1) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$, (2) $y' + (i-2)y = t^2$,

(3) $f' - e^x f = 3e^x$, (4) $\begin{cases} y' + 2xy = e^{x-x^2} \\ y(0) = 4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} f' + \frac{1}{x}\ f = \cos x \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$, (6) $\begin{cases} y' + \tan(t)\ y = \dfrac{1}{\cos t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 2 (second ordre à coefficients constants)

Résoudre les problèmes différentiels suivants :

(1) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 3te^{-t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 25t^2 - 3 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \sin(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(5) $y'' + 4y = 3\cos(2t)$ (6) $y'' - y' - 6y = 5te^{3t}$

Exercice 3 Résoudre l'équation $\quad y' + y = \displaystyle\int_0^1 y(t)dt \quad$ d'inconnue y dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(Indication : on pourra dériver l'équation par rapport à x

Exercice 5 Résoudre les systèmes différentiels suivants d'inconnues y, z dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{cases}$

Exercice 6 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ (b) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$

Exercice 1
Résoudre les équations différentielles suivantes. Ne pas oublier de préciser sur quel intervalle on résout l'équation.

(1) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$, (2) $y' + (i-2)y = t^2$,

(3) $f' - e^x f = 3e^x$, (4) $\begin{cases} y' + 2xy = e^{x-x^2} \\ y(0) = 4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} f' + \frac{1}{x}\ f = \cos x \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$, (6) $\begin{cases} y' + \tan(t)\ y = \dfrac{1}{\cos t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 2 (second ordre à coefficients constants)

Résoudre les problèmes différentiels suivants :

(1) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 3te^{-t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 25t^2 - 3 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \sin(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(5) $y'' + 4y = 3\cos(2t)$ (6) $y'' - y' - 6y = 5te^{3t}$

Exercice 3 Résoudre l'équation $\quad y' + y = \displaystyle\int_0^1 y(t)dt \quad$ d'inconnue y dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(Indication : on pourra dériver l'équation par rapport à x

Exercice 5 Résoudre les systèmes différentiels suivants d'inconnues y, z dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + z = 6y \end{cases}$

Exercice 6 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ (b) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$