Exercice 4

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$

1) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$

Posons $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ g est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Donc $\displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et f est définie sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer le signe et la parité de f

- Signe de f : $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) > 0$

§ Pour $x > 0,\ x \leq 2x \Rightarrow \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$ (Bornes dans le bon sens)

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

§ Pour $x < 0,\ x \geq 2x \Rightarrow f(x) \leq 0$

- Parité de f :

$g(-t) = \mathrm{e}^{-(-t)^2} = \mathrm{e}^{-t^2} = g(t)$ Donc g est paire sur $\mathbb{R}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} g(t)\,\mathrm{d}t$

Posons $u = -t \Rightarrow \mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$ Bornes : $\begin{cases} t = -2x & u = 2x \\ t = -x & u = x \end{cases}$

D'où $f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(-u)(-\,\mathrm{d}u) = -\int_x^{2x} g(u)\,\mathrm{d}u$ car g est paire

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ f est impaire

3) Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f

g est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G qui est C^1 sur $\mathbb{R}$

Or $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = G(2x) - G(x)$

Donc f est également C^1 sur $\mathbb{R}$

Dérivée :

$$f'(x) = G'(2x)(2x)' - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$$
$$= 2\mathrm{e}^{-3x^2}\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}\left(2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1\right)$$

Or $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc

$$f'(x) > 0 \iff 2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-3x^2} > 1/2$$

$$\iff -3x^2 > -\ln 2 \iff x^2 < \frac{\ln 2}{3} \iff |x| < \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$

$$\iff -\alpha < x < +\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$

Ce qui donne le TV suivant :

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	(0)	$\searrow$	$-f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	(0)
signe de $f(x)$		$-$			0			$+$	

4) A l'aide d'un encadrement judicieux, déterminer la limite de f en $+\infty$

< < < Tentons l'encadrement bourrin : > > >

Soit $x > 0 \Rightarrow x < 2x$

Pour $x \in [x, 2x]$

$x \leq t \leq 2x$ (tout est positif donc :)

$\Rightarrow x^2 \leq t^2 \leq 4x^2$

$\Rightarrow -x^2 \geq -t^2 \geq -4x^2$

$\Rightarrow \mathrm{e}^{-x^2} \geq \mathrm{e}^{-t^2} \geq \mathrm{e}^{-4x^2} \geq 0$

$\Rightarrow (2x - x)\mathrm{e}^{-x^2} \geq \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$ car $x < 2x$ (BBS)

$\Rightarrow x\mathrm{e}^{-x^2} \geq f(x) \geq 0$

Or $x\mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{X}\mathrm{e}^{-X}$ avec $X = x^2$

Qd $x \to +\infty,\ X = x^2 \to +\infty \Rightarrow \sqrt{X}\mathrm{e}^{-X} \to 0$ (croissance comparée)

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par encadrement

5) Équivalent en $+\infty$

a) A l'aide d'une intégration par partie, trouver une relation, pour $x \neq 0$, entre $f(x)$ et $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\ \mathrm{d}t$

< < < Zut ! La notation g a déjà été utilisée plus haut. Ce qui n'est pas trop grave car on ne va pas se resservir a priori de l'ancienne fonction g. Continuons donc notre chemin l'âme en paix. Dans le plus pire des cas on pourra, si besoin est, noter $g_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ > > >

Pour $x \neq 0$

Posons $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{-t^2} & u'(t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2} \\ v'(t) = 1/t^2 & v(t) = -1/t \end{cases}$ avec $\underline{u, v\ C^1 \text{ sur }]0, +\infty[}$

$$g(x) = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} 2\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{-\mathrm{e}^{-4x^2}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right] - 2f(x)$$

b) Montrer que $g(x) = o\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right)$

< < < C'est la question vraiment difficile de l'énoncé.

Remarquons qu'on ne peut utiliser un équivalent de f car on ne connaît presque rien sur f. De plus, dans l'énoncé, on doit déduire en fin de problème l'équivalent de f. Donc il faut trouver g avant de trouver f.

On veut montrer que $\dfrac{g(x)}{\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}} = \dfrac{xg(x)}{\mathrm{e}^{-x^2}} \to 0$ Il faut donc encadrer g

L'encadrement bourrin ne marche pas. Il faut donc affiner : encadrer un des termes du produit/quotient et intégrer l'autre. > > >

- <u>1er essai</u> : on encadre e^{-t^2} et on intègre $1/t^2$

  Pour $x > 0$ et $x \leq t \leq x^2$,

  $$0 \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-x^2}$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} \leq \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t^2}$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t^2}\ \mathrm{d}t \quad \text{car } x \leq 2x$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq g(x) \leq \mathrm{e}^{-x^2} \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

  avec $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = [-1/t]_x^{2x} = [-1/(2x) + 1/x] = 1/(2x)$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq g(x) \leq \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{x.g(x)}{\mathrm{e}^{-x^2}} \leq \frac{1}{2}$$

  Mince alors ! On ne peut pas conclure

- <u>2ème essai</u> :Il faut donc essayer d'intégrer quelque chose d'autre. On ne connaît pas de primitive de e^{-t^2}

  Mais heureusement, d'après les calculs précédents, on connaît une primitive de $2t\mathrm{e}^{-t^2}$.

  $$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} = \frac{2t\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^3} = 2t\mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{2t^3}$$

  Pour $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$

  $$2x^3 \leq 2t^3 \leq 2(2x)^3$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{1}{2t^3} \leq \frac{1}{2x^3}$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{2t.\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^3} \leq \frac{2t.\mathrm{e}^{-t^2}}{2x^3}$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq g(x) \leq \int_x^{2x} \frac{2t\mathrm{e}^{-t^2}}{2x^3}\ \mathrm{d}t \quad \text{car} \quad x \leq 2x$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2x^3}\int_x^{2x} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2x^3}\left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^{2x}$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2x^3}\left[-\mathrm{e}^{-4x^2} + \mathrm{e}^{-x^2}\right]$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{x.g(x)}{\mathrm{e}^{-x^2}} \leq \frac{1}{2x^3}\left[-\mathrm{e}^{-4x^2} + \mathrm{e}^{-x^2}\right].x.\mathrm{e}^{x^2}$$

  $$\Rightarrow\quad 0 \leq \frac{x.g(x)}{\mathrm{e}^{-x^2}} \leq \frac{1}{2x^2}\left[-\mathrm{e}^{-3x^2} + 1\right]$$

  Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{2x^2}\left[-\mathrm{e}^{-3x^2} + 1\right] \to 0$

  Donc, par encadrement $\dfrac{x.g(x)}{\mathrm{e}^{-x^2}} \to 0$

$$\Rightarrow \quad g(x) = o\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right) \text{ en } +\infty$$

c) Déterminer un équivalent le plus simple possible de f en $+\infty$

Écrivons f en fonction de g

$$g(x) = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-4x^2}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right] - 2f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{-1}{4}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-4x^2}}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} - \frac{1}{2}g(x)$$

D'une part $\quad g(x) = o\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right)$

D'autre part : $\quad \frac{\mathrm{e}^{-4x^2}}{e^{-x^2}} = \mathrm{e}^{-3x^2} \to 0$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-4x^2} = o(e^{-x^2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^{-4x^2}}{x} = o\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right)$$

Donc $\quad f(x) \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}$

Exercice 6

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n

f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction polynôme).

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 9 > 0 \quad \text{car } x \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty \qquad f_n(0) = -4$$

f_n est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}_+$

Donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+) = [-4; +\infty[$

Or $0 \in f_n(\mathbb{R}_+)$

Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+$

b. Calculer u_1 et u_2

- Calcul de u_1

$$\begin{aligned} f_1(x) = 0 &\iff x + 9x^2 - 4 = 0 \\ &\iff 9x^2 + x - 4 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 9 \times (-4) = 145$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{2\times 9} = \frac{-1+\sqrt{145}}{18} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{145}}{18} < 0$

Or $\quad u_1 \geq 0 \quad$ donc $\quad u_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18}$

- Calcul de u_2

$$\begin{aligned} f_2(x) = 0 &\iff x^2 + 9x^2 - 4 = 0 \\ &\iff 10x^2 - 4 = 0 \\ &\iff x^2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ &\iff x = +\sqrt{\frac{2}{5}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Or $\quad u_2 \geq 0 \quad$ donc $\quad u_2 = +\sqrt{\frac{2}{5}}$

c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in \left]0\ ;\ \frac{2}{3}\right[$

$f_n(0) = -4 < 0$

$f_n(2/3) = (2/3)^n + 9(2/3)^2 - 4 = (2/3)^n + 9(4/9) - 4 = (2/3)^n$

Donc

$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(2/3)$

$\Rightarrow \quad 0 < u_n < 2/3 \qquad$ car f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2. a. Montrer que, pour tout x élément de $]0,1[$, on a : $\quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (x^{n+1} + 9x^2 - 4) - (x^n + 9x^2 - 4) \\ &= x^{n+1} - x^n \\ &= x^n(x-1) < 0 \qquad \text{car } x \in]0;1[\end{aligned}$$

b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n)

On a vu que $u_n \in]0; 2/3[$ donc $u_n \in]0;1[$

On peut donc remplacer x par u_{n+1} dans la question précédente :

$f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1})$.

Or $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_n) = 0 \Rightarrow f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$

Donc $\qquad 0 < f_n(u_{n+1})$.

Or $\qquad f_n(u_n) = 0$

Donc $\quad f_n(u_n) < f_n(u_{n+1})$

Or f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Donc $\quad u_n < u_{n+1}$

La suite u est donc croissante

c. $\boxed{\text{Montrer que la suite } (u_n) \text{ est convergente. On note } \ell \text{ sa limite}}$

La suite (u_n) est croissante et majorée par $2/3$.

Donc elle converge vers une limite ℓ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_1 \leq u_n \leq \ell \leq 2/3$$

3. a. $\boxed{\text{Déterminer la limite de } (u_n)^n \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

On a $\quad 0 \leq u_n \leq 2/3$

Donc $\quad 0 \leq (u_n)^n \leq (2/3)^n \quad$ car $(x \to x^n)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

Or $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} (2/3)^n = 0 \quad$ car $|2/3| < 1$

Donc, par encadrement, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b. $\boxed{\text{Donner enfin la valeur de } \ell}$

On a $\quad f_n(u_n) = 0$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} & (u_n)^n + 9(u_n)^2 - 4 = 0 \\ \iff\ & 9(u_n)^2 = 4 - (u_n)^n \\ \iff\ & (u_n)^2 = \frac{4 - (u_n)^n}{9} \end{aligned}$$

Or $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$

Donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^2 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \sqrt{\frac{4}{9}} \quad$ avec $\quad u_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |u_n| = u_n$

$\Rightarrow \quad \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3} \qquad$ car $\quad u_n \geq 0$