1 Équations différentielles linéaire premier ordre à coefficients constants

1.1 Généralités

Définition 1 : Equa diff premier ordre coefs constants

On appelle équation différentielle du premier ordre tout équation de la forme

$$y' + ay = f \quad (E)$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I

Elle pour équation homogène associée (EHA)

$$y' + ay = 0 \quad (E_0)$$

Propriété 1 : Solutions de l'équation homogène

Soit $a \in \mathbb{C}$
Les solutions générales de l'équation homogène $y' + a.y = 0$ sont de la forme

$$y_0(x) = K.\mathrm{e}^{-a.x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{C} \quad \text{(SEHA)}$$

Propriété 2 : Solution générale

Soit l'équation différentielle $y' + a.y = g(x)$ **(E)**
Soit y_0 la solution générale de l'équation homogène associée $y' + a.y = 0$ $(\mathbf{E_0})$
Soit y_P une solution particulière de **(E)**
Alors toutes les solutions de **(E)** s'écrivent de la forme :

$$y_G = y_P + y_0 \qquad \textbf{(SG=SP+SEHA)}$$

1.2 solution particulière

Le but de cette section est d'avoir des méthodes pour trouver la forme des solutions particulières de l'équation $y' + ay = g(x)$ suivant le type du second membre $g(x)$

a) $g(x) = C$ constante on cherche $y_P = K$ constante

b) $g(x) = P(x)$ avec P polynôme
$y_P(x) = Q(x)$ polynôme avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$

c) $g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$
2 cas : si $\mathrm{e}^{\alpha x}$ n'est pas solution de l'EHA ($\iff \alpha \neq -a$
$y_P(x) = K.\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$
si $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution de l'EHA ($\iff \alpha = -a$)
$y_P(x) = K.\mathbf{x}.\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$

d) $g(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec P polynôme
2 cas :

- Si $\mathrm{e}^{\alpha x}$ n'est pas solution de l'EHA ($\iff \alpha \neq -a$)
  $y_P(x) = K.\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$
- Si $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution de l'EHA ($\iff \alpha = -a$)
  $y_P(x) = \mathbf{x}.Q(x).\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$

Livre de recette de Papy Servain

Second membre	Solution particulière	
C$^{\text{te}}$ C	C$^{\text{te}}$ K	
Polynôme $P(x)$	Polynôme $Q(x)$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$	
$\mathrm{e}^{\alpha x}$	Si $\alpha \neq -a$	$K.\mathrm{e}^{\alpha x}$
	Si $\alpha = -a$	$K.x.\mathrm{e}^{\alpha x}$
$P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$	Si $\alpha \neq -a$	$\mathrm{e}^{\alpha x}.Q(x)$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$
	Si $\alpha = -a$	$x.\mathrm{e}^{\alpha x}.Q(x)$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$

1.3 Exemples

Exemple 1 : $y' + 2y = \cos x$

Exemple 2 : $y' + 2y = x \sin 3x$

Exemple 3 : $y' + \mathbf{i}y = \cos x$

2 ED linéaire du 2^{nd} ordre à coefficients constants

Définition 2

Une ED du second ordre à coef constants est de la forme

$$y'' + by' + cy = g(x) \quad \text{(E)}$$

avec $g : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, $(b, c) \in \mathbb{C}^2$

Elle a pour équation homogène associée

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$$

Définition 3 : Équation caractéristique

L'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$

a pour équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$

et pour discriminant $\Delta = b^2 - 4c$

2.1 Solutions de l'EHA dans $\mathbb{C}$

Propriété 3 : solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$

- 1er cas : $\Delta \neq 0$
  L'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet deux solutions **distinctes** dans $\mathbb{C}$: $r_1,\ r_2$
  Et les solutions de **(E)** sont de la forme
  $$y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$
- 2ème cas : $\Delta = 0$
  L'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet unique solution dans $\mathbb{C}$: r_0
  Et les solutions de **(E)** sont de la forme
  $$y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_0 x} + \mu.x.\mathrm{e}^{r_0 x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

2.2 Solutions de l'EHA dans $\mathbb{R}$

Position du problème

On suppose que les coefficients (a, b, c) de l'équation sont réels, il s'agit de trouver les solutions réelles de l'équation.

- Dans les cas où $\Delta = 0$ ou bien $\Delta > 0$, les solutions le l'EC sont réelles et donc
  $$y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x} \quad \text{et respectivement} \quad y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_0 x} + \mu x.\mathrm{e}^{r_0 x}$$
  avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
  sont bien des fonctions réelles. Donc il n'y a pas de problème.
- Dans les cas où $\Delta < 0$ les solutions le l'EC sont deux nombres complexes conjuguées et donc l'expression $y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}$ ne convient plus car les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x},\ \mathrm{e}^{r_2 x}$ sont complexes
  Il faut donc trouver une autre écriture

Propriété 4 : solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$

Équa. diff. $y'' + by' + cy = 0$ **(E)** avec $(b, c) \in \mathbb{R}^2$

- 1er cas : $\Delta > 0$
  L'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet deux solutions **distinctes** dans $\mathbb{R}$: $r_1,\ r_2$
  Et les solutions de **(E)** sont de la forme
  $$y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
- 2ème cas : $\Delta = 0$
  L'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet unique solution dans $\mathbb{R}$: r_0
  Et les solutions de **(E)** sont de la forme
  $$y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_0 x} + \mu x.\mathrm{e}^{r_0 x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
- 3ème cas : $\Delta < 0$
  L'équation caractéristique $r^2+br+c = 0$ deux solutions **conjuguées** dans $\mathbb{C}$: $r_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta, \quad r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta$
  Et les solutions de **(E)** sont de la forme
  $$y_0(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.\big[A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x))\big] \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Δ	Racines de EC	Solutions de base	
		Dans $\mathbb{C}$	Dans $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$	r_0 (racine double)	$\mathrm{e}^{r_0 x}$	$x.\mathrm{e}^{r_0 x}$
$\Delta > 0$	$r_1 \neq r_2$	$\mathrm{e}^{r_1 x}$	$\mathrm{e}^{r_2 x}$
$\Delta < 0$	$r_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta$	$\mathrm{e}^{r_1 x}$	$\mathrm{e}^{\alpha x} \cos(\beta x)$
	$r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta$	$\mathrm{e}^{r_2 x}$	$\mathrm{e}^{\alpha x} \sin(\beta x)$

2.3 solution particulière

On retrouve la même chose que pour le premier ordre : Pour une second membre de la forme $g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}P(x)$, on va chercher une SP sous la forme $y_p(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\times$Polynôme
Si $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est solution de l'EHA, alors il faut « monter » le degré du polynôme
Remarquer qu'un polynôme simple $g(x) = P(x)$ se met sous la dforme $P(x)\mathrm{e}^{0.x}$ et donc ici $\alpha = 0$

Recettes de Tatie SERVAIN :

Second membre	**Solution particulière**
$g(x) = P(x)$	$y_p(x) = Q(x)$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$
$g(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec α pas racine de l'EC avec α racine simple de l'EC avec α racine double de l'EC	$\left.\begin{array}{l} y_p(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \\ y_p(x) = x.Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \\ y_p(x) = x^2Q(x).\mathrm{e}^{\alpha x}\end{array}\right\\}$ avec $\mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P$

3 Equations linéaires du premier ordre

3.1 Équation homogène

Propriété 5 : SEHA

Soit a une <u>fonction continue</u> définie sur l'intervalle I
Alors les solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$ sont du type

$$y_0(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}$$

avec $K \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et A est une primitive de a sur I

3.2 Solution particulière

Ne pas oublier la **Solution évidente** sous la forme d'une constante

Exemple : $y' + x.y = 2x$

La fonction définie par $y_P(x) = 2$ est solution particulière évidente

Définition 4 : méthode de variation de la constante

Soit $y' + a(x).y = g(x)$ une equa. diff. et $y_0(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$ une solution de l'équation homogène associée.

La méthode de variation de la constante consiste à rechercher une solution particulière du type :

$$y_P(x) = C(x).y_0(x) = C(x).\mathrm{e}^{-A(x)}$$

où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une <u>fonction</u> dérivable.

Exemple : $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$

4 Principe de superposition

Propriété 6 : Principe de superposition

Soient α, β deux constantes, a, b_1, $b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ trois fonctions
y_1 solution de $y' + a.y = b_1$
et y_2 solution de $y' + a.y = b_2$
Alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de $y' + a.y = \alpha\ b_1 + \beta\ b_2$

Quelques démonstrations

5 Équations différentielles linéaire premier ordre à coefficients constants

Propriété 7 : solutions de l'équation homogène

> Soit $a \in \mathbb{C}$
> Les solutions générales de l'équation homogène $y' + a.y = 0$
> sont de la forme
> $$y_0(x) = K.\mathrm{e}^{-a.x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{C} \quad \text{(SEHA)}$$

Intuition (c'est souvent ce qui est fait en physique)

$$y' + a.y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a \iff (\ln|y|)' = -a$$
$$\iff \ln|y| = -a.x + C \iff |y| = \mathrm{e}^C \mathrm{e}^{-a.x} \iff y(x) = K.\mathrm{e}^{-a.x}$$

Ou encore, en notation différentielle :

$$y' + a.y = 0 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = -a.\,\mathrm{d}x$$
$$\iff \mathrm{d}\big(\ln|y|\big) = \mathrm{d}\big(-a.x\big) \iff \ln|y| = -a.x + C$$
$$\iff |y| = \mathrm{e}^C \mathrm{e}^{-a.x} \iff y(x) = K.\mathrm{e}^{-a.x}$$

Le problème est qu'il faudrait justifier que y ne s'annule jamais.

On va utiliser les résultats précédents pour faire une démonstration rigoureuse

- **Analyse**

  Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable solution de l'équation

  hs (E) $y' + a.y = 0 \iff y'(x) + a.y(x) = 0$

  Idée : On veut montrer que $y(x) = K.\mathrm{e}^{-a.x}$.
  On va se ramener à une fonction constante : $z(x) = y(x)\mathrm{e}^{a.x} = K$
  ce qui simplifie les choses

  Posons $z(x) = y(x)\mathrm{e}^{a.x} \iff y(x) = z(x)\mathrm{e}^{-a.x}$

  $\Rightarrow \quad y'(x) = z'(x)\mathrm{e}^{-a.x} - a.z(x)\mathrm{e}^{-a.x}$

  Or $y'(x) + a.y(x) = 0$

  $\Rightarrow \quad \big(z'(x)\mathrm{e}^{-a.x} - a.z(x)\mathrm{e}^{-a.x}\big) + a\big(z(x)\mathrm{e}^{-a.x}\big) = 0$

  $\Rightarrow \quad z'(x)\mathrm{e}^{-a.x} = 0$

  $\Rightarrow \quad z'(x) = 0$

  z est donc contanste sur $\mathbb{R}$

  Donc il existe $K \in \mathbb{C}$ telle que $z(x) = K$

  $\Rightarrow \quad y(x) = z(x)\mathrm{e}^{-a.x} = K.\mathrm{e}^{-a.x}$ CQFD

- **Synthèse**

  Il suffit de vérifier que les solutions conviennent
  Soit $y(x) = K.\mathrm{e}^{-a.x}$

  $\Rightarrow \quad y'(x) = -aK.\mathrm{e}^{-a.x}$

  $\Rightarrow \quad y'(x) + a.y(x) = 0$ CQFD

Propriété 8 : Solution générale

> Soit l'équation différentielle $y' + a.y = g(x)$ **(E)**
> Soit y_0 les solutions de l'équation homogène associée
> $y' + a.y = 0$ $(\mathbf{E_0})$
> Soit y_P une solution particulière de **(E)**
> Alors toutes les solutions de **(E)** s'écrivent de la forme :
> $y_G = y_P + y_0$ (**SG=SP+SEHA**)

Démonstration Soit y_P une solution particulière
Nous allons montrer que
y_G est solution de $(E) \iff y_G - y_P$ est solution de (E_0) :

On a y_P solution de (E)
Donc $y'_P(x) + a.y_P(x) = g(x)$ **(1)**

D'où

y_G est solution de (E)

$\iff \quad y'_G(x) + a.y_G(x) = g(x)$ **(2)**

$\iff \quad \big(y'_G(x) - y'_P(x)\big) + a\big(y_G(x) - y_P(x)\big) = 0$ **(2)-(1)**

$\iff \quad (y_G - y_P)'(x) + a.(y_G - y_P)(x) = 0$

$\iff \quad (y_G - y_P)$ est solution de $\mathbf{E_0}$

$\iff \quad y_G - y_P = y_0$ avec y_0 solution de $\mathbf{E_0}$

$\iff \quad y_G = y_0 + y_P$

5.1 Exemples

Exemple 1 : $y' + 2y = \cos x$

Exemple 2 : $y' + 2y = x \sin 3x$

Exemple 3 : $y' + \mathbf{i}y = \cos x$

6 ED linéaire du 2nd ordre à coefficients constants

6.1 Solutions de l'EHA dans $\mathbb{C}$

Propriété 9 : Combinaison linéaire

Soit l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$

Si y_1 et y_2 sont solutions de (E_0)

alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

$\lambda.y_1 + \mu.y_2$ est aussi solution de (E_0)

(L'ensemble des solutions de (E_0) est stable par comibniaison linéaire)

Démonstration

Supposons y_1 et y_2 solutions de (E_0)

On a : $\begin{cases} y_1'' + b.y_1' + c.y_1 = 0 \\ y_2'' + b.y_2' + c.y_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad (\lambda.y_1'' + \mu.y_2'') + (\lambda.b.y_1' + \mu.b.y_1') + (\lambda.c.y_1 + \mu.c.y_2) = 0 \quad (\lambda L_1 + \mu.L_2)$

$\Rightarrow \quad (\lambda.y_1 + \mu.y_2)'' + b.(\lambda.y_1 + \mu.y_1)' + c.(\lambda.y_1 + \mu.y_2) = 0$

$\Rightarrow \quad (\lambda.y_1 + \mu.y_2)$ est solution de (E_0)

Propriété 10 : solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$

- 1er cas : $\Delta \neq 0$
  L'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet deux solutions **distinctes** dans $\mathbb{C}$: $r_1,\ r_2$
  Et les solutions de **(E)** sont de la forme
  $$y_0(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$
- 2ème cas : $\Delta = 0$
  L'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet unique solution dans $\mathbb{C}$: r_0
  Et les solutions de **(E)** sont de la forme
  $$y_0(x) = \lambda e^{r_0 x} + \mu.x.e^{r_0 x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

Démonstration

Analyse :

Soit y une solution de l'équation (E_0). Cherchons comment s'écrit $y(x)$

r_1, r_2 sont solutions de l'équation : $r^2 - b.x + c$

Donc $b = -(r_1 + r_2)$ et $c = r_1 r_2$ (avec $r_1 = r_2 = r_0$ dans le cas $\Delta = 0$)

Donc l'équation (E_0) s'écrit :

$y'' - (r_1 + r_2)y' + (r_1 r_2)y = 0$

$\iff \quad y'' - r_1.y' - r_2.y' + r_1 r_2.y = 0$

$\iff \quad (y'' - r_1.y') - r_2(y' - r_1.y) = 0$

Posons $z = y' - r_1.y$

On a donc $(E_0) \iff z' - r_2.z = 0$

Équation homogène du premier ordre

Donc $z_2 = Ae^{r_2 x}$

$\Rightarrow \quad y' - r_1.y = Ae^{r_2 x}$

Équation du premier ordre

- 1er cas : $\Delta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 \neq r_2$
  Donc une solution particuliere est de la forme $y_P(x) = Be^{r_2 x}$
  Et la solution de l'EHA $y' - r_1.y = 0$ est de la forme $C.e^{r_1 x}$
  Donc on a : $y(x) = Be^{r_2 x} + C.e^{r_1 x}$
- 2ème cas : $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = r_0$
  Donc une solution particulière est de la forme $y_P = B.xe^{r_0 x}$
  Et la SEHA $y' - r_0.y = 0$ est de la forme $C.e^{r_0 x}$
  Donc on a : $y(x) = B.xe^{r_0 x} + C.e^{r_0 x}$ CQFD

Synthèse :

- Si $\Delta \neq 0$
  Posons $y_1(x) = e^{r_1 x}$,
  $y_1'(x) = r_1 e^{r_1 x} \quad y_1''(x) = (r_1)^2 e^{r_1 x}$
  $\Rightarrow \quad y_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x) = (r_1)^2 e^{r_1 x} + b.r_1 e^{r_1 x} + c.e^{r_1 x} = (r_1^2 + b.r_1 + c)e^{r_1 x} = 0$
  car r_1 est solution de l'équation $r^2 + b.r + c = 0$
  Donc y_1 est solution de (E_0)
  De même, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ est solution de (E_0)
  Par combinaison linéaire $\lambda.y_1 + \mu.y_2(x) = \lambda.e^{r_1 x} + \mu.e^{r_2 x}$ est solution de (E_0)

- Si $\Delta = 0$

  Alors r_0 est racine double de $\quad r^2 + br + c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2r_0$ et $c = (r_0)^2$

  Posons $y_1 = \mathrm{e}^{r_0 x}$ et $y_2(x) = x\mathrm{e}^{r_0 x}$

  y_1 est solution de (E_0) comme précédemment

  $$y_2(x) = x\mathrm{e}^{r_0 x}$$
  $$\Rightarrow \quad y_2'(x) = (1 + r_0 x)\mathrm{e}^{r_0 x}$$
  $$\Rightarrow \quad y_2''(x) = r_0(2 + r_0 x)\mathrm{e}^{r_0 x}$$

  D'où :

  $$\begin{aligned} & y_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) \\ &= r_0(2 + r_0 x)\mathrm{e}^{r_0 x} + b(1 + r_0 x)\mathrm{e}^{r_0 x} + cx\mathrm{e}^{r_0 x} \\ &= \big(2r_0 + b + (r_0^2 + br_0 + c)x\big)\mathrm{e}^{r_0 x} \end{aligned}$$

  Or $\quad b = -2r_0 \quad$ et $\quad r_0^2 + br_0 + c = 0$

  Donc y_2 est bien solution de (E_0)

  Par combinaison linéaire

  $$(\lambda.y_1 + \mu.y_2)(x) = \lambda.\mathrm{e}^{r_0 x} + \mu.x\mathrm{e}^{r_0 x} \quad \text{est solution de } (E_0)$$

6.2 Solutions de l'EHA dans $\mathbb{R}$

Propriété 11 : solutions de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$

> 3ème cas : $\quad \Delta < 0$
> L'équation caractéristique $\quad r^2 + br + c = 0 \quad$ deux solutions **conjuguées** dans $\mathbb{C}$: $\quad r_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta, \quad r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta$
>
> Et les solutions de **(E)** sont de la forme
> $$y_0(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.\big[A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x))\big] \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration

On se place donc dans le cas $\Delta < 0$ et on pose $\Delta = -\delta^2$

On a $\quad r_1 = \dfrac{-b + \mathbf{i}\delta}{2a} = \alpha + \mathbf{i}\beta \quad r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta \quad$ les deux racines conjuguées de l'EC $ar^2 + br + c = 0$

Soit g une solution réelles de l'équation $\quad a'' + by' + cy = 0 \quad$ **(E)**

A fortiori, g est une solution complexe de **(E)**

Et donc d'après ce qui précède, g s'écrit :

$$g(x) = \lambda\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\mathrm{e}^{r_2 x} \quad \text{avec } \lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

Or g est réelles. Donc

$$\begin{aligned} & g(x) = \overline{g(x)} \\ \iff \quad & \lambda\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\mathrm{e}^{r_2 x} = \overline{\lambda\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\mathrm{e}^{r_2 x}} \\ \iff \quad & \lambda\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\mathrm{e}^{r_2 x} = \overline{\lambda}\mathrm{e}^{\overline{r_1} x} + \overline{\mu}\mathrm{e}^{\overline{r_2} x} \quad \text{car } x \in \mathbb{R} \\ \iff \quad & \lambda\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\mathrm{e}^{r_2 x} = \overline{\lambda}\mathrm{e}^{r_2 x} + \overline{\mu}\mathrm{e}^{r_1 x} \quad \text{car } r_1, r_2 \text{ sont conjuguées} \end{aligned}$$

$\iff \quad \lambda = \overline{\mu}$ et $\mu = \overline{\lambda}$ (par identification car $r_1 \neq r_2 \Rightarrow$ les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, \ \mathrm{e}^{r_2 x}$ sont linéairement indépendantes

$$\begin{aligned} \iff \quad & \mu = \overline{\lambda} \\ \Rightarrow \quad g(x) &= \lambda\mathrm{e}^{r_1 x} + \overline{\lambda}\mathrm{e}^{r_2 x} \\ &= \lambda\mathrm{e}^{r_1 x} + \overline{\lambda\mathrm{e}^{r_1 x}} \quad \text{car } r_1, r_2 \text{ sont conjuguées} \\ &= 2\mathrm{Re}(\lambda\mathrm{e}^{r_1 x}) \\ &= 2\mathrm{Re}(\lambda\mathrm{e}^{(\alpha + \mathbf{i}\beta)x}) \\ &= 2\mathrm{Re}\big[\lambda\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathbf{i}\sin(\beta x))\big] \\ &= 2\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{Re}\big[\lambda(\cos(\beta x) + \mathbf{i}\sin(\beta x))\big] \\ &= 2\mathrm{e}^{\alpha x}.\big[\mathrm{Re}(\lambda).\cos(\beta x) - \mathrm{Im}(\lambda).\sin(\beta x))\big] \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}.\big[A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x))\big] \end{aligned}$$

avec $\quad A = \mathrm{Re}(\lambda) \quad$ et $\quad B = \mathrm{Im}(\lambda)$

Conclusion : $\quad g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.\big[A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x))\big]$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

7 Équations linéaires du premier ordre

7.1 Équation homogène

Propriété 12 : SEHA

> Soit a une <u>fonction continue</u> définie sur l'intervalle I
> Alors les solution de l'équation $\quad y' + a(x)y = 0 \quad$ sont du type
> $$y_0(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}$$
> avec $K \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et A est une primitive de a sur I

Démonstration

a est continu et donc admet une primitive A sur l'intervalle I
Soit y_0 une solution de l'équation.
On pose $f(x) = \mathrm{e}^{A(x)} y_0(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (A(x))'.\mathrm{e}^{A(x)} y_0(x) + \mathrm{e}^{A(x)} y_0'(x) \\ &= a(x).\mathrm{e}^{A(x)} y_0(x) + \mathrm{e}^{A(x)} y_0'(x) \\ &= (a(x).y_0(x) + y_0'(x))\mathrm{e}^{-A(x)} \\ &= 0 \quad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation} \end{aligned}$$

Donc f est constante sur l'intervalle I

Et donc il existe $K \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in I, f(x) = K$

$\Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^{A(x)} y_0(x) = K$

$\Rightarrow \quad y_0(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}$

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont bien solution de (E_0)

7.2 Solution particulière

Définition 5 : méthode de variation de la constante

> Soit $y' + a(x).y = g(x)$ une equa. diff. et $y_0(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$ une solution de l'équation homogène associée.
>
> La méthode de variation de la constante consiste à rechercher une solution particulière du type :
>
> $$y_P(x) = C(x).y_0(x) = C(x).\mathrm{e}^{-A(x)}$$
>
> où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction dérivable.

Posons $y_P(x) = C(x).y_0(x)$

$\Rightarrow \quad y_P'(x) = C'(x).y_0(x) + C(x).y_0(x)$

Donc

y_P solution de (E)

$\iff \quad y_P'(x) + a(x).y_P(x) = g(x)$

$\iff \quad (C'(x).y_0(x) + C(x).y_0(x)) + a(x).C(x).y_0(x) = g(x)$

$\iff \quad C'(x).y_0(x) + C(x)\big[y_0(x) + a(x).y_0(x)\big] = g(x)$

$\iff \quad C'(x).y_0(x) = g(x)$ car y_0 est SEHA

$\iff \quad C'(x).\mathrm{e}^{-A(x)} = g(x)$

$\iff \quad C'(x) = g(x).\mathrm{e}^{A(x)}$

Cela fournit une expression de $C(x)$ comme primitive de $x \mapsto g(x).\mathrm{e}^{A(x)}$

Exemple : $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$

8 Principe de superposition

Propriété 13 : Principe de superposition

> Soient $\alpha,\ \beta$ deux constantes, $a,\ b_1,\ b_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ trois fonctions
> y_1 solution de $y' + a.y = b_1$
> et y_2 solution de $y' + a.y = b_2$
> Alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de $y' + a.y = \alpha\ b_1 + \beta\ b_2$

Démonstration

y_1 solution de $y' + a.y = b_1 \Rightarrow y_1'(x) + a(x).y_1(x) = b_1(x)$ **(1)**
y_2 solution de $y' + a.y = b_2 \Rightarrow y_2'(x) + a(x).y_2(x) = b_2(x)$ **(2)**

On fait une combinaison linéaire : α **(1)**+β **(2)**

$$\alpha\big(y_1'(x) + a(x).y_1(x)\big) + \beta\big(y_2'(x) + a(x).y_2(x)\big) = \alpha\ b_1(x) + \beta\ b_2(x)$$

$\iff \quad \big(\alpha\ y_1 + \beta\ y_2\big)'(x) + a(x).\big(\alpha\ y_1 + \beta\ y_2\big)(x) = \alpha\ b_1(x) + \beta\ b_2(x)$

$\iff \quad \big(\alpha\ y_1 + \beta\ y_2\big)$ est solution de l'équation $y' + a.y = \alpha\ b_1 + \beta\ b_2$