Exercice 1 Déterminer les solutions réelles des ED suivantes.

a) $xy'\ln(x) - y = 2x^2\ln^2(x)$ sur $]0;1[$

b) $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $y(1) = 1$

c) $y' + 4y = 2 +_{e}^{-4x} + \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

d) $y' + x^2y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$

e) $y' - 3y = e^{3x} + \mathrm{e}^x\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

f) $(x-1)y' + y = x$ sur $]1;+\infty[$ avec $y(2) = 2$

g) $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x} + 6$ sur $\mathbb{R}$

h) $y' - y\tan(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0) = 1$.

i) $y' + 2xy = \mathrm{e}^{x-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 4$

j) $xy' - 2y = x^3\sin(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 2 Déterminer les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ des ED suivantes.

a) $y'' + y' - 2y = 10\sin(x)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

b) $y'' - 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^{2x} + 4$ et $y(0) = y'(0) = 1$

c) $y'' + y' = \mathrm{sh}\,(x)$

d) $y'' - y = \mathrm{e}^x\cos(2x)$

e) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 - 3$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

f) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$

g) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{ch}\,(x)$

h) $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}\,(x)$

i) $y'' + 4y = \sin(2x)$

j) $y'' - y' - 6y = 5x\mathrm{e}^{3x}$

Exercice 3 On considère l'équation différentielle à coefficients non constants (dite équation d'Euler)

$$(E) \quad x^2y'' - \frac{3}{2}xy' + y = 0$$

Soit y une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

a) On pose $z(t) = y(e^t)$. Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$.
En déduire que la fonction z définie par $z(t) = y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.

b) Résoudre cette équation et en déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 1 Déterminer les solutions réelles des ED suivantes.

a) $xy'\ln(x) - y = 2x^2\ln^2(x)$ sur $]0;1[$

b) $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}^*$ avec $y(1) = 1$

c) $y' + 4y = 2 +_{e}^{-4x} + \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

d) $y' + x^2y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$

e) $y' - 3y = e^{3x} + \mathrm{e}^x\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

f) $(x-1)y' + y = x$ sur $]1;+\infty[$ avec $y(2) = 2$

g) $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x} + 6$ sur $\mathbb{R}$

h) $y' - y\tan(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0) = 1$.

i) $y' + 2xy = \mathrm{e}^{x-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 4$

j) $xy' - 2y = x^3\sin(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 2 Déterminer les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ des ED suivantes.

a) $y'' + y' - 2y = 10\sin(x)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

b) $y'' - 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^{2x} + 4$ et $y(0) = y'(0) = 1$

c) $y'' + y' = \mathrm{sh}\,(x)$

d) $y'' - y = \mathrm{e}^x\cos(2x)$

e) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 - 3$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

f) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$

g) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{ch}\,(x)$

h) $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}\,(x)$

i) $y'' + 4y = \sin(2x)$

j) $y'' - y' - 6y = 5x\mathrm{e}^{3x}$

Exercice 3 On considère l'équation différentielle à coefficients non constants (dite équation d'Euler)

$$(E) \quad x^2y'' - \frac{3}{2}xy' + y = 0$$

Soit y une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

a) On pose $z(t) = y(e^t)$. Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$.
En déduire que la fonction z définie par $z(t) = y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.

b) Résoudre cette équation et en déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.