1) Écrire sous la forme $a.b^n.c^k$ avec $a,\ b,\ c$ constantes (C 018d)

$$\frac{\alpha^{2n-k+1}}{(\beta^{2k+n})^3} = \frac{\alpha^{2n-k+1}}{\beta^{6k+3n}} = \frac{\alpha^{2n}\alpha^{-k}\alpha}{\beta^{6k}\beta^{3n}} = \alpha\left(\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right)^n\left(\frac{\alpha^{-1}}{\beta^6}\right)^k$$

2) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ (C 104a)

3) $\tan x \geq -1 \iff \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$ (C 176b)

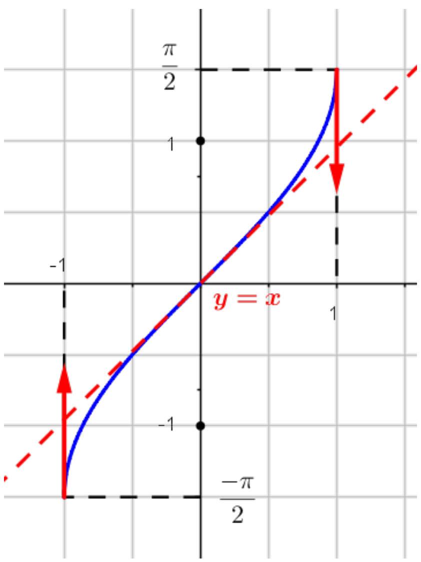
4) Formule d'Euler : $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}$ (C 245b)

5) Dans $\mathbb{C}$: Soit $r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$ (C 321b)

$z^n = r\mathrm{e}^{i\theta} \iff z = \sqrt[n]{r}.\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ avec $k\in\{0,\ 1,\ \dots,\ n-1\}$
(ou avec $k\in\{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$)

6) Soit $a>0$ $(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right)' = (\ln a).\mathrm{e}^{x\ln a} = (\ln a).a^x$ sur $\mathbb{R}$ (C 414)

7) Tracer l'allure de la courbe de $x\mapsto \arcsin x$ (C 450)



8) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pour } q\neq 1 \\ n+1 & \text{pour } q=1 \end{cases}$ (C 516a)

9) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (C 545c)

à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cas $\Delta<0$: les solutions réelles sont de la forme :

$u_n = \underline{\rho^n(\lambda.\cos n\theta + \mu\sin n\theta)}$ avec $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$

et $r_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta = \rho\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, $r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta = \rho\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}$,

racines (conjuguées) de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$

10) Double Inégalité triangulaire : (C 567)

$\forall(x,\ y)\in\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$), $\Big||x|-|y|\Big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

11) Vrai ou Faux ?... **Faux** (C 603a)

$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall p\in\mathbb{Z},\ \lfloor p.x\rfloor = p\lfloor x\rfloor$

12) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}3^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k.1^{n+1-k} = \left(\frac{1}{3}+1\right)^{n+1}$ (C 640c)

$= (4/3)^{n+1}$

13) Vrai ou Faux ? ...**Vrai** (C 724a)

$(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$

14) Soit $f:E\to F$ et $g:F\to E$ deux applications (C 768a)

$f\circ g : \underline{F} \to \underline{F}$ est définie par : $\underline{\forall x\in F,\ (f\circ g)(x) = f[g(x)]}$

15) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, $x^\alpha\to+\infty$ quand $x\to+\infty \iff \alpha>0$ (C 809a)

$\boxed{\text{Car } x^\alpha = \exp(\alpha.\ln x)}$

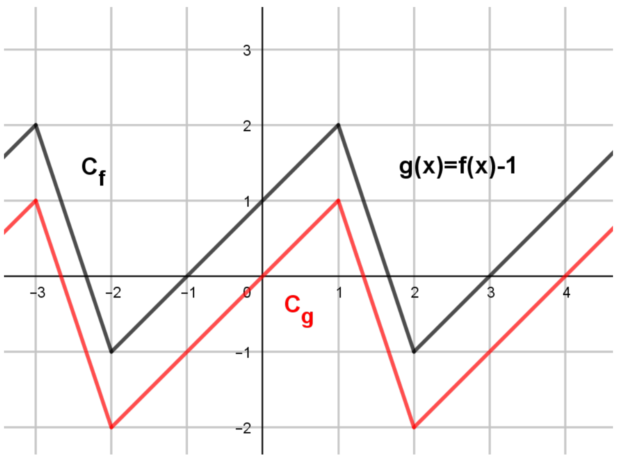
16) $f'(0) = a \neq 0 \iff f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} a.x$ (C 827a)

17) Le domaine des valeurs de arccos est : $[0, \pi]$ (C 900b)

18) $\arcsin(\cos(5\pi/8)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}))$ (C 915e)

$= \arcsin(\sin(\frac{-\pi}{8})) = \frac{-\pi}{8}$ car $\frac{-\pi}{8} \in [-\pi/2,\ \pi/2]$

19) On a tracé une partie du graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Tracer le graphe de g définie par $g(x) = f(x) - 1$ (C 1005a)



20) Soit f continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I = [a,\ b[$
Alors f réalise une bijection ... (C 1030c)

de $I = [a,\ b[$ sur $J = f(I) =]\lim_{x\to b} f(x); f(a)]$

Explications

- f est décroissante donc il faut inverser les bornes dans $f(I)$.
- f définie sur $[a, b[$, donc pas définie en b. $f(b)$ n'existant, il faut remplacer par la limite.
- Par contre f est définie en a, donc pas besoin de chercher la limite en a

21) $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ (C 1053b)

22) $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\ dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ (C 1076)

23) $K = \displaystyle\int_x^x (x+1)\sqrt{2x-3}\ dx$ avec $y = \sqrt{2x-3}$ (C 1104c)

Bornes : $\begin{cases} x = 4 & y = \sqrt{5} \\ x = 2 & y = 1 \end{cases}$

$y = \sqrt{2x-3} \Rightarrow 2x - 3 = y^2 \Rightarrow 2\ dx = 2y\ dy \Rightarrow\ dx = 2y\ dy$

$K = \displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{y^2+3}{2} + 1\right) y.(2y\ dy) = \int_1^{\sqrt{5}} (y^2+5)y^2\ dy$

24) Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Si f est continue et $f \geq 0$ sur $[a, b]$ (C 1117a)

Et $\displaystyle\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$ sur $[a, b]$

25) $y'' + by' + cy = 0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cas $\Delta > 0$: (C 1135a)
Les solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
et $r_1,\ r_2$ racine(s) de $r^2 + br + c = 0$

26) Soit (u_n) une suite réelle (C 1202a)
m est un minorant de la suite u $\iff$ $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$

27) Vrai ou Faux ? ...**Vrai** (C 1223b)

$[\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty] \Rightarrow$ la suite (u_n) n'est pas minorée

28) Vrai ou Faux ?... **Faux** (E 1232c)

Si u est une suites décroissante et positive
Alors u converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

La suite converge bien, mais pas nécessairement vers 0
Contre-exemple : la suite u définie par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

29) La proposition suivante est **Fausse** (C 1246h)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 1$

Contre-exemple : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$ et $(u_n)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$

30) Vrai ou faux ?... **Faux** (C 1612b)

Soient A et B deux matrices telle que $AB = I$
Alors A et B sont inversibles et $B = A^{-1}$

Il faut que A et B soient des matrices **carrées**

Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = I_2$

Pourtant ni A ni B ne sont inversibles