Exercice 1

1. a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}.\cos 3x \quad \text{(E)}$$

On a une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.

- Solution de l'équation homogène associé (EHA) $y'' + y' - 2y = 0$ (E_0)

  Équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$

  Solution évidente : $r_1 = 1,\ r_2 = -2$
  Donc $y_0(x) = \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{-2x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Solution particulière de $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-2x}$ (E_1)

  On cherche une solutions sous la forme $y(x) = a.x.\mathrm{e}^{-2x}$
  (car e^{-2x} est une des solutions de l'EHA)

  $$y'(x) = a(-2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$$
  $$y''(x) = a(4x-2-2)\mathrm{e}^{-2x} = a(4x-4)\mathrm{e}^{-2x}$$
  $$y'' + y' - 2y = a\big[(4x-4) + (-2x+1) - 2x)\big]\mathrm{e}^{-2x} = a.(-3)\mathrm{e}^{-2x}$$

  Donc $(E_1) \iff -3a\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x} \iff a = -1/3$

  $\boxed{y_1(x) = \dfrac{-1}{3}\ x.\mathrm{e}^{-2x}}$ solution particulière de (E_1)

- Solution particulière de

  $$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-x}\cos 3x = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})x}\big) \quad (E_2)$$

  Cherchons une solution de $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})x}$ (E_2')
  de la forme $y(x) = a.\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})x}$

  $$y'(x) = a.(-1+3\mathbf{i})\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})x}$$
  $$y''(x) = a.(-1+3\mathbf{i})^2\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})x} = a.(-8-6\mathbf{i})\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})}$$
  $$y''+y'-2y = a.\big[(-8-6\mathbf{i})+(-1+3\mathbf{i})-2\big]\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})} = a.(-11-3\mathbf{i})\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})}$$

  Donc $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{(-1+2\mathbf{i})x} \iff (-11-3\mathbf{i})a = 1$

  $$\iff a = \frac{1}{-11-3\mathbf{i}} = \frac{-11+3\mathbf{i}}{11^2+3^2} = \frac{-11+3\mathbf{i}}{130}$$

  $$y_2(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{-11+3\mathbf{i}}{130}\mathrm{e}^{(-1+3\mathbf{i})x}\right)$$
  $$= \frac{1}{130}\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{Re}\left((-11+3\mathbf{i})(\cos 3x + \mathbf{i}\sin 3x)\right)$$

  $\boxed{y_2(x) = \dfrac{1}{130}\mathrm{e}^{-x}(-11\cos 3x - 3\sin 3x)}$ solution particulière de (E_2)

- Conclusion : par le principe de superposition, les solutions de (E) sont de la forme

  $$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) \\ &= \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{3}\ x.\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{130}(11\cos 3x + 3\sin 3x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales :

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{3}\ x.\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{130}\mathrm{e}^{-x}(11\cos 3x + 3\sin 3x)$$

$$y(0) = \lambda + \mu - \frac{11}{130}$$

$$\begin{aligned} y'(x) = {}& \lambda\mathrm{e}^{x} - 2\mu\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{3}\ (1-2x).\mathrm{e}^{-2x} \\ & - \frac{1}{130}\big[-\mathrm{e}^{-x}(11\cos 3x + 3\sin 3x) + \mathrm{e}^{-x}(-33\sin 3x + 9\cos 3x)\big] \end{aligned}$$

$$y'(0) = \lambda - 2\mu - \frac{1}{3} - \frac{1}{130}(-11+9) = \lambda - 2\mu - \frac{1}{3} + \frac{2}{130}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} \lambda & +\mu & -\dfrac{11}{130} & = 1 \\ \lambda & -2\mu & -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{130} & = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{l} 130.L_1 \\ (3\times 130)L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{lll} 130.\lambda & +130.\mu & -11 = 130 \\ (3\cdot 130)\lambda & -(2.3.130)\mu & -130+6 = 390 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} 130.\lambda & +130.\mu & = 141 \\ (3\cdot 130)\lambda & -(6\cdot 130)\mu & = 514 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} 130.\lambda & +130.\mu & = a \\ (3\cdot 130)\lambda & -(6\cdot 130)\mu & = b \end{array}\right.$$

avec $\left\{\begin{array}{l} a = 141 \\ b = 390 + 130 - 6 = 514 \end{array}\right.$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{llll} 130.\lambda & +130.\mu & = & a \\ & -(9\cdot 130)\mu & = & -3a \quad +b \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \begin{matrix} 9L_1+L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} (9\cdot 130)\lambda & = 6a + b \\ -(9\cdot 130)\mu & = -3a + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{6a+b}{(9\cdot 130)} \\ \mu = \dfrac{3a-b}{(9\cdot 130)} \end{cases}$$

$6a+b = 6\cdot 141 + 514 = 846 + 514 = 1360$

$3a-b = 3\cdot 141 - 514 = 423 - 514 = -91$

$\Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{1360}{9\cdot 130} \quad \mu = \dfrac{-91}{9\cdot 130}$

Donc

$$\boxed{y(x) = \frac{1360}{1170}e^{x} - \frac{91}{1170}e^{-2x} - \frac{1}{3}\ x.e^{-2x} - \frac{e^{-x}}{130}(11\cos 3x + 3\sin 3x)}$$

Vérif : $\begin{cases} \lambda \quad +\mu \quad -\dfrac{11}{130} & = 1 \\ \lambda \quad -2\mu \quad -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{130} & = 1 \end{cases}$

$$\lambda + \mu - \frac{11}{130} = \frac{1360}{9\cdot 130} + \frac{-91}{9\cdot 130} - \frac{11}{130}$$

$$= \frac{1360-91}{9\cdot 130} - \frac{11}{130} = \frac{1269}{9\cdot 130} - \frac{11}{130} = \frac{9\cdot 141}{9\cdot 130} - \frac{11}{130} = \frac{141-11}{130} = 1$$

$$\lambda - 2\mu - \frac{1}{3} + \frac{2}{130} = \frac{1360}{9\cdot 130} - 2\frac{-91}{9\cdot 130} - \frac{1}{3} + \frac{18}{9\cdot 130}$$

$$= \frac{1360+182+18}{9\cdot 130} - \frac{1}{3} = \frac{1560}{9\cdot 130} - \frac{1}{3} = \frac{130\cdot 12}{9\cdot 130} - \frac{1}{3} = \frac{12}{9} - \frac{1}{3} = 1$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0;+\infty[$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos 3x}{x} \qquad \text{(E)}$$

On a une équation linéaire du premier ordre à coefficients non constants.

- Solution de l'équation homogène associé (EHA) $\quad y' + a(x).y = 0 \quad$ avec $a(x) = \dfrac{2}{x} \quad (E_0)$

  $A(x) = 2\ln x$ est une primitive de a

  Les solutions sont de la forme $\quad y_0(x) = K.e^{-A(x)} = Ke^{-2\ln x} = K.\dfrac{1}{x^2}$

- Solution particulière.

  On la cherche sous la forme $y(x) = C(x).\dfrac{1}{x^2}$ (méthode de variation de la constante)

  $y'(x) = C'(x)\dfrac{1}{x^2} + C(x)\dfrac{-2}{x^3}$ y solution de (E) $\iff$

  $\iff \quad C'(x)\dfrac{1}{x^2} + C(x)\dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{2}{x}C(x).\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\cos 3x}{x}$

  $\iff \quad C'(x)\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\cos 3x}{x}$

  $\iff \quad C'(x) = x\ \cos 3x$

  Cherchons une primitive de $\quad x\ \cos 3x$

  On peut poser $\quad C(x) = \displaystyle\int_0^x t\ \cos 3t\ dt$

  et faire une intégration par parties :

  $\begin{cases} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \cos 3t & v(t) = \dfrac{1}{3}\sin 3t \end{cases}$ avec $u,\ v \quad C^1$ sur $\mathbb{R}$

  $$C(x) = \left[t\frac{1}{3}\sin 3t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{3}\sin 3t\ dt$$
  $$= \frac{1}{3}x\ \sin 3x - \left[-\frac{1}{9}\cos 3t\right]_0^x$$
  $$= \frac{1}{3}x\ \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{9}$$

  C est définie à une constante additive près, donc on peut prendre

  $$C(x) = \frac{1}{3}x\ \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x$$

  Et donc $\quad y_P(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x\ \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x}{x^2} = \dfrac{3x\ \sin 3x + \cos 3x}{9x^2}$

- Conclusion : Les solution de (E) sont de la forme

  $$\boxed{y(x) = K.\frac{1}{x^2} + \frac{3x\ \sin 3x + \cos 3x}{9x^2}} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

1. Déterminer une primitive sur un domaine à préciser des fonctions suivantes :

   a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 8}$

   $x^2 - 4x + 8$ a pour discriminant $\quad \Delta = 4^2 - 4\times 8 = -16 < 0$

   Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{x^2-4x+8} = \frac{1}{(x-2)^2-4+8} = \frac{1}{(x-2)^2+2^2}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(\frac{x-2}{2})^2+1} = \frac{2}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x-2}{2})^2+1}$$

$\Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(\frac{x-2}{2})$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b) $\boxed{h : x \mapsto \dfrac{x+1}{(2x-1)^2}}$

< < < On sait primitiver $\quad \dfrac{1}{(2x-1)^2} \quad$ et $\quad \dfrac{1}{(2x-1)}$

Il faut donc se débarrasser du x dans le dénominateur :> > >

h est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1/2\}$ Donc h admet des primitives sur $]-\infty, 1/2[$ et sur $]1/2,\ +\infty[$

$$h(x) = \frac{x+1}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)+3}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{(2x-1)^2} + \frac{3}{(2x-1)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1} + \frac{-3}{2}\cdot\frac{-2}{(2x-1)^2}\right)$$

$H(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\ln|2x-1| + \dfrac{-3}{2}\cdot\dfrac{1}{2x-1}\right)$ en utilisant $\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{-u'}{u^2}$

$H(x) = \dfrac{1}{4}\ln|2x-1| - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2x-1}$ On obtient donc,

- sur $]-\infty, 1/2[, H(x) = \dfrac{-3}{4}\dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{4}\ln(-2x+1)$
- sur $]1/2,\ +\infty[,\ H(x) = \dfrac{-3}{4}\dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{4}\ln(2x-1)$

2. $\boxed{\text{Calculer} \quad \int_1^9 \dfrac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \quad \text{en posant} \quad u = \sqrt{t}}$

$u = \sqrt{t} \quad \Longleftrightarrow \quad t = u^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = 2u\ \mathrm{d}u$

Bornes : $\begin{cases} t = 9 & \Rightarrow \quad u = 3 \\ t = 1 & \Rightarrow \quad u = 1 \end{cases}$

$$\int_1^9 \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{u^2+1}{u^4.u}\ (2u\ \mathrm{d}u)$$
$$= 2\int_1^3 \frac{u^2+1}{u^4}\ \mathrm{d}u$$
$$= 2\int_1^3 \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}\ \mathrm{d}u$$
$$= 2\int_1^3 u^{-2} + u^{-4}\ \mathrm{d}u$$
$$= 2\left[-u^{-1} + \frac{u^{-3}}{-3}\right]_1^3$$
$$= 2\left[\frac{-1}{u} + \frac{1}{-3u^3}\right]_1^3$$
$$= 2\left[\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{-3.3^3}\right) - \left(\frac{-1}{1} + \frac{1}{-3.1^3}\right)\right]$$
$$= 2\left[\frac{-1}{3} + \frac{-1}{81} + 1 + \frac{1}{3}\right]$$
$$= 2\frac{80}{81} = \frac{160}{81}$$

Exercice 3

1. Résoudre le système
$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases}$$
d'inconnue $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ a$ désignant un paramètre réel.

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x & -ay & +z & = 2 \\ x & & +(a+1)z & = 3 \\ x & +ay & +3z & = 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x & -ay & +z & = 2 \\ x & & +(a+1)z & = 3 \\ 2x & & +4z & = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} x & -ay & +z & = 2 \\ x & & +(a+1)z & = 3 \\ & & (2-2a)z & = 0 \end{cases}$$

Système triangulaire de pivots $\quad (2-2a),\ 1,\ -a$

- 1er cas : si $a = 0$

$$(S) \iff \begin{cases} x & +z &= 2 \\ x & +z &= 3 \\ & 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & &= 2 \\ x & &= 3 \\ & z &= 0 \end{cases}$$

Système impossible $\quad S = \emptyset$

- 2ème cas : $a = 1$

$$(S) \iff \begin{cases} x & -y & +z &= 2 \\ x & & +2z &= 3 \\ & & 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} -y & -z = -1 \\ x & +2z = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -z+1 \\ x = -2z+3 \end{cases}$$

Donc $\quad S = \{(-2z+3,\ -z+1,\ z),\ z \in \mathbb{R}\}$

- $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,\ 1\}$ Aucun des pivots n'est nul. Donc on a un système de Cramer (solution unique)

$$(S) \iff \begin{cases} x & -ay & +z &= 2 \\ x & & +(a+1)z &= 3 \\ & & (2-2a)z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & -ay & +z &= 2 \\ x & & +(a+1)z &= 3 \\ & & z &= 0 \end{cases} \quad \text{car} \quad a \neq 1$$

$$\iff \begin{cases} x & -ay &= 2 \\ x & &= 3 \\ & z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} -ay &= -1 \\ x &= 3 \\ z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} y &= 1/a \\ x &= 3 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Donc $\quad S = \{3,\ 1/a,\ 0\}$

2. Calculer par la méthode du pivot, l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.A$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.A$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.A$$

$$\iff \begin{array}{l} 2L_1 - L_3 \\ 2L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.A$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/(-2) \\ L_3/(-2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.A$$

Donc $\quad A$ est inversible et $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Vérification : on fait le produit $A.A^{-1}$ et on retrouve bien I_3

Exercice 4

Soient $\quad a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad$ et $\quad b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

   Il faut montrer que l'une est croissante, l'autre décroissante et que la différence tend vers vers 0

   - $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$

     La suite (a_n) est croissante

   - $b_n = a_n + \dfrac{1}{n.n!} \quad$ Donc

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{n+1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \end{aligned}$$

$$= \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$
$$= \frac{n(n+2)}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)n.n!(n+1)}$$
$$= \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$
$$= \frac{(n^2+2n)-(n^2+2n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

Donc la suite (b_n) est décroissante

- $b_n - a_n = \dfrac{1}{n.n!}$ Donc $\lim\limits_{n\to 0}(b_n - a_n) = 0$

Conclusion : les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes

2. Que peut-on en déduire ?

Donc les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une meme limite ℓ

telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \ell \leq b_n$

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\ \mathrm{d}x$

a) Calculer $u_0,\ u_1,\ u_2$.

$$u_0 = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t = 1$$
$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x$$
$$= \big[x - \ln|1+x|\big]_0^1 = 1 - \ln 2$$
$$u_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$
$$= \big[x - \arctan x\big]_0^1 = [1-\arctan(1)] - [0-\arctan(0)] = 1 - \pi/4$$

b) Étudier la monotonie de (u_n). Que peut-on en déduire ?

- $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(1+x^n) - x^n(1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^{2n+1}-x^n-x^{2n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\ \mathrm{d}x$$

Or, pour $x \in [0,1]$ $x - 1 < 0$ et $\dfrac{x^n}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \geq 0,$

$\Rightarrow \dfrac{x^n(x-1)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \leq 0$

Et $0 < 1$ (Bornes dans le bon sens)

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suites u_n est décroissante

- De plus, pour $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x^n} \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x \geq 0$ car $0 < 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} ? u_n \geq 0$

- La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite ℓ (inconnue) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell \leq u_n$

c) Encadrer u_n et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Pour $x \in [0,1]$

$0 \leq x^n \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1 + x^n \leq 2$ (tout est positif)

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{2}x^n$

$\Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{2}x^n\ \mathrm{d}x$ car $0 \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$

Or, quand $n \to +\infty$, $\dfrac{1}{2(n+1)} \to 0$

Donc, par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

d) En faisant une intégration par partie, déterminer une relation entre u_n et v_n

$u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx \quad$ et $\quad v_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^n) & u'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$

avec u, v C^1 sur $[0,1]$. Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} v_n &= [x\ln(1+x^n)]_0^1 - \int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\, dx \\ &= \ln 2 - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dx \\ &= \ln 2 - n.u_n \end{aligned}$$

e) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\quad \ln x \leq x - 1$

Etudions $f(x) = \ln x - x + 1$ sur $[1, +\infty[$ f est continue dérivable $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} < 0$ pour $x > 1$

Donc f est décroissante sur $[1,+\infty[$ avec $f(1) = 0$

Donc $\quad \forall x \geq 1,\ f(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x \leq x - 1$

f) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

Pour $x \in [0,1], 1 + x^n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x^n) \leq (1+x^n) - 1 = x^n$ d'aprées ce qui précde

De plus $1 + x^n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x^n) \geq 0$

D'où $\quad 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx$

$\Rightarrow \quad 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n+1}1$ Comme $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$

Par encadrement $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

g) En déduire un équivalent simple de u_n

Or $v_n = \ln 2 - n.u_n$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n.u_n = \ln 2$

$\Rightarrow \quad n.u_n \sim \ln 2$

$\Rightarrow \quad u_n \sim \dfrac{\ln 2}{n}$

Exercice 6 (Étude d'une bijection)

On considère la fonction f définie par la relation $\quad f(x) = \sqrt{x}\ \mathrm{e}^{-x/2}$

1. a) Sur quels intervalles la fonction f est-elle définie ? continue ? dérivable ? Préciser la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,\ +\infty[$
  $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  Donc f est définie et continue sur $[0,\ +\infty[$
  et f est dérivable sur $]0,\ +\infty[$
- En 0, étudions le taux d'accroissment :
  $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}\ \mathrm{e}^{-x/2}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{x}}$$
  Donc $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$
  Donc f n'est pas dérivable en 0 et C_f admet une tangente verticale.

b) Dresser le tableau de variation de f.

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x})'\ (\mathrm{e}^{-x/2}) + (\sqrt{x})\ (\mathrm{e}^{-x/2})' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (\mathrm{e}^{-x/2}) + \sqrt{x}(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2\sqrt{x}}(1-x) \end{aligned}$$

Donc $\quad f'(x) \geq 0 \quad \iff \quad 1 - x \geq 0 \quad \iff \quad 0 \leq x \leq 1$

$f(0) = 0, \quad f(1) = \mathrm{e}^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (croissance comparé)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

$$\mathrm{e}=2,7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mathrm{e}} \simeq \sqrt{2,7} \simeq 1,7 \quad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \simeq \frac{1}{1,7} \simeq 0,6$$

c) Justifier que la courbe représentative de f présente une inflexion en un point d'abscisse α à préciser. (C'est-à-dire une valeur pour laquelle la dérivée seconde f'' de f s'annule)

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2\sqrt{x}}(1-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2}(x^{-1/2} - x^{1/2})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f''(x) &= (\frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2})'.(x^{-1/2} - x^{1/2}) + \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2}(x^{-1/2} - x^{1/2})' \\
&= (\frac{-\mathrm{e}^{-x/2}}{4}).(x^{-1/2} - x^{1/2}) + \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2}(\frac{-1}{2}x^{-3/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{4}.\big((-x^{-1/2} + x^{1/2}) + (-x^{-3/2} - x^{-1/2})\big) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{4}.x^{-3/2}\big(-x + x^2 - 1 - x\big) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{4.x\sqrt{x}}\big(x^2 - 2x - 1\big)
\end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 8 \quad x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} > 0 \quad x_2 = 1+\sqrt{2} < 0$$

Donc f'' s'annule en $\quad \alpha = 1+\sqrt{2}$

avec $\quad f(\alpha) = \sqrt{1+\sqrt{2}}\ \mathrm{e}^{-(1+\sqrt{2})/2}$

(Valeur absolument impossible à calculer.)

d) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en α avec l'axe (Ox) .

La tangente C_f en α a pour équation :

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$

Elle coupe l'axe (Ox) pour $y=0 \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x &= -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \alpha = -\frac{\sqrt{\alpha}\ \mathrm{e}^{-\alpha/2}}{\frac{\mathrm{e}^{-\alpha/2}}{2\sqrt{\alpha}}(1-\alpha)} + \alpha \\
&= -\frac{\sqrt{\alpha}}{\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}} + \alpha = -\frac{2\alpha}{1-\alpha} + \alpha \\
&= -\frac{2(1+\sqrt{2})}{-\sqrt{2}} + (1+\sqrt{2}) = +\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) \\
&= 3 + 2\sqrt{2} \simeq 3 + 2\cdot 1,4 = 5,8
\end{aligned}$$

e) Représenter f et sa tangente en α en prenant des unités égales à 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.

2. a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1]$ vers l'intervalle $\left[0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$. On note alors φ l'application réciproque correspondante.

f est continue strictement croissante sur $[0,\ 1]$ donc f établit une bijection de $\quad I = [0,\ 1] \quad$ sur $\quad f(I) = [f(0),\ f(1)] = \left[0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$

Et sa réciproque $\quad \varphi : \left[0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right] \to [0,\ 1] \quad$ est aussi une bijection continue strictement décroissante

b) Dresser le tableau de variation de φ

x	0		$1/\sqrt{\mathrm{e}}$
φ	0	$\nearrow$	1

c) Justifier que φ est dérivable sur $\left]0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right[$

Soit $\quad x = \varphi(y) \quad$ avec $\quad y \in \left]0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right[$
On a alors $\quad x \in]0,1[$
Donc f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$

Donc φ est dérivable en y et $\quad \varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{(f' \circ \varphi)(x)}$

Conclusion : φ est bien dérivable sur $\left]0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right[$

d) Étudier la dérivabilité de φ en 0 et en $1/\sqrt{\mathrm{e}}$

Le théorème précédent ne nous dit rien sur la dérivabilité de φ en 0 et en $1/\sqrt{\mathrm{e}}$
Il faut donc revenir au binôme de Newton.

Soit à nouveau $x = \varphi(y)$ avec $y \in \left]0,\ 1/\sqrt{e}\right[$ et $x \in]0, 1[$

- En 0

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{y - 0} = \frac{x - 0}{f(x) - 0} = \frac{x - 0}{f(x) - 0} = \frac{x}{\sqrt{x}\ e^{-x/2}} = \sqrt{x}\ e^{x/2}$$

Quand $y \to 0$,

$$x = \varphi(y) \to \varphi(0) = 0 \quad \text{car } \varphi \text{ est continue en } 0$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x}\ e^{x/2} \to 0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\varphi(y) - \varphi(0)}{y - 0} = 0$

φ est donc dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$ (C_f admet une tangente horizontale en 0)

- En $1/\sqrt{e}$

On a $1/\sqrt{e} = f(1)$ et $\varphi(1/\sqrt{e}) = 1$

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(1/\sqrt{e})}{y - 1/\sqrt{e}} = \frac{x - 1}{f(x) - f(1)}$$

Quand $y \to 1/\sqrt{e}$

$$x = \varphi(y) \to 1 \quad \text{car } \varphi \text{ est continue en } 1/\sqrt{e}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \to f'(1) = 0$ car f est dérivable en 1

$\Rightarrow \quad \dfrac{x - 1}{f(x) - f(1)} \to \infty$

Donc φ n'est pas dérivable en $1/\sqrt{e}$ mais la courbe de φ y admet une tangente verticale.

e) **Déterminer un équivalent simple de φ au voisinage de 0.**

$\varphi(y) = x$ avec $f(x) = y = \sqrt{x}e^{-x/2}$

Quand $x \to 0$,

$$e^{-x/2} \to 1 \quad \Rightarrow \quad y \sim \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x \sim y^2$$

$\Rightarrow \quad \varphi(y) \sim y^2$ en 0

3. a) **On admet que f réalise une bijection de l'intervalle $[1,\ +\infty[$ vers un intervalle J'. Donner cet intervalle J'**

f est continue strictement décroissante sur $I' = [1, +\infty[$

donc $J' = g(I') =]\lim\limits_{+\infty} f,\ f(1)] = \left]0,\ 1/\sqrt{e}\right]$

b) **On note ψ l'application réciproque correspondante. Dresser le tableau de variation de ψ.**

x	0		$1/\sqrt{e}$
ψ	$+\infty$	$\searrow$	1

c) **Déterminer un équivalent simple de ψ au voisinage de 0.**

Soit $y = f(x)$ avec $y \in]0, 1/\sqrt{e}[$ et $x \in]1,\ +\infty[$

Quand $y \to 0$, $x \to +\infty$ On a : $y = \sqrt{x}\ e^{-x/2}$

$\Rightarrow \quad \ln y = \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{x}{2} \sim -\dfrac{x}{2}$ car $x \to +\infty$ et $\ln x = o(x)$ en $+\infty$

$\Rightarrow \quad \ln y \sim -x/2 \quad \Rightarrow \quad x \sim -2\ln y \quad \Rightarrow \quad \psi(y) = x \underset{y \to 0}{\sim} -2\ln y$

4. **On considère l'application composée $g = \varphi \circ \psi^{-1}$ Donner son ensemble de définition Dresser le tableau de variation de g (avec les limites)**

$\psi : \left]0,\ 1/\sqrt{e}\right] \to [1,\ +\infty[$ est continue strictement décroissante

$\Rightarrow \quad \psi^{-1} : [1,\ +\infty[\to \left]0,\ 1/\sqrt{e}\right]$ est continue strictement décroissante

$\varphi : \left]0,\ 1/\sqrt{e}\right] \to]0, 1]$ est continue strictement croissante

Donc $g :\ [1,\ +\infty[\xrightarrow{\psi^{-1}} \left]0,\ 1/\sqrt{e}\right] \xrightarrow{\varphi}]0, 1]$

D'où : g est définie sur $[1,\ +\infty[$

et $g : [1,\ +\infty[\to]0, 1]$ est une fonction continue strictement décroissante :

x	1		$+\infty$
g	1	$\searrow$	0