Professeur : SERVAIN	**Discipline : Maths**
Classe : PCSI	**Durée de l'épreuve : 3 h 00**
Durée minimale : 2 h 30	**Matériel autorisé : Rien**

- **Marge droite de 2 cm**
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de **première feuille** : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Sanction : -10 %

*On commencera chacun des 4 exercices sur des **pages** différentes)*

Exercice 1

1. a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}.\cos 3x \quad \text{(E)}$$

   b) Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales :

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0; +\infty[$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos 3x}{x} \qquad \text{(E)}$$

Exercice 2

1. a) Déterminer une primitive sur un domaine à préciser des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4x + 8}$$

$$h : x \mapsto \frac{x+1}{(2x-1)^2}$$

   b) Calculer $\displaystyle\int_1^9 \frac{t+1}{t^2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{t}$

Exercice 3

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases}$$

d'inconnue $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ a$ désignant un paramètre réel.

2. Calculer par la méthode du pivot, l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Soient $\displaystyle a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\displaystyle b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 — **A faire sur une nouvelle feuille**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle v_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$

a) Calculer $u_0,\ u_1,\ u_2$.

b) Étudier la monotonie de (u_n). Que peut-on en déduire ?

c) Encadrer u_n et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to 0} u_n = 0$

d) En faisant une intégration par partie, déterminer une relation entre u_n et v_n

e) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln x \leq x - 1$

f) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n$

g) En déduire un équivalent simple de u_n

Exercice 6 (Étude d'une bijection)

A faire sur une nouvelle feuille

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x/2}$

1. a) Sur quels intervalles la fonction f est-elle définie ? continue ? dérivable ?
   Préciser la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Justifier que la courbe représentative de f présente une inflexion en un point d'abscisse α à préciser. (C'est-à-dire une valeur pour laquelle la dérivée seconde f'' de f s'annule)
   d) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en α avec l'axe (Ox) .
   e) Représenter f et sa tangente en α en prenant des unités égales à 2 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée.
2. a) Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0,1]$ vers l'intervalle $\left[0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$. On note alors φ l'application réciproque correspondante.
   b) Dresser le tableau de variation de φ
   c) Justifier que φ est dérivable sur $\left]0,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right[$
   d) Étudier la dérivabilité de φ en 0 et en $1/\sqrt{\mathrm{e}}$
   e) Déterminer un équivalent simple de φ au voisinage de 0.
3. a) On admet que f réalise une bijection de l'intervalle $[1,\ +\infty[$ vers un intervalle J'.
   Donner cet intervalle J'
   b) On note ψ l'application réciproque correspondante.
   Dresser le tableau de variation de ψ.
   c) Déterminer un équivalent simple de ψ au voisinage de 0.
4. On considère l'application composée $g = \varphi \circ \psi^{-1}$
   Donner son ensemble de définition
   Dresser le tableau de variation de g (avec les limites)