 FE 12 c (miscellanées)

Exercice 1 (classique)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n
Démontrer par analyse synthèse qu'il existe un unique couple (A, B) tel que $M = A + B$ avec A matrice symétrique et B matrice antisymétrique.

Exercice 2 (**)

1) Soit $A,\ B$ deux matrices carrées d'ordre n Démontrer que AB est inversible $\Rightarrow$ A et B sont inversibles
2) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrice triangulaires supérieures d'ordre n. Démontrer que $A.B$ est également triangulaire supérieure. En déduire que les produit de matrices triangulaire inférieures est aussi une matrice triangulaire inférieure.
3) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soients $A = (a_{i,j}),\ B = A^T = (b_{i,j}),\ C = (c_{i,j})$

   telles que $a_{i,j} = i \quad c_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Soient $D = A.B \quad E = B.A \quad F = C.A$ Calculer $d_{i,j},\ e_{i,j}, e_{i,j}$

Exercice 3 (Intégrales de Wallis) (Classique)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \ \mathrm{d}t$

a) Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$
b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \mathrm{d}t$ et $I_n > 0$
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$
d) Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.
e) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$
f) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 4
Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Trouver les solutions de l'équation différentielle
$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$
vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5
Déterminer un équivalent en 1 de $f(x) = \arccos x$
(On pourra poser $x = 1 - t$ avec $t > 0$)

Exercice 1 (classique)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n
Démontrer par analyse synthèse qu'il existe un unique couple (A, B) tel que $M = A + B$ avec A matrice symétrique et B matrice antisymétrique.

Exercice 2 (**)

1) Soit $A,\ B$ deux matrices carrées d'ordre n Démontrer que AB est inversible $\Rightarrow$ A et B sont inversibles
2) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrice triangulaires supérieures d'ordre n. Démontrer que $A.B$ est également triangulaire supérieure. En déduire que les produit de matrices triangulaire inférieures est aussi une matrice triangulaire inférieure.
3) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soients $A = (a_{i,j}),\ B = A^T = (b_{i,j}),\ C = (c_{i,j})$

   telles que $a_{i,j} = i \quad c_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Soient $D = A.B \quad E = B.A \quad F = C.A$ Calculer $d_{i,j},\ e_{i,j}, e_{i,j}$

Exercice 3 (Intégrales de Wallis) (Classique)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \ \mathrm{d}t$

a) Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$
b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \ \mathrm{d}t$ et $I_n > 0$
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$
d) Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.
e) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$
f) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 4
Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Trouver les solutions de l'équation différentielle
$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$
vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5
Déterminer un équivalent en 1 de $f(x) = \arccos x$
(On pourra poser $x = 1 - t$ avec $t > 0$)