 FE 12 d (Pbm)

Exercice 1 *Préliminaire :*

1. Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\quad f = f_p + f_i, \quad$ où $\quad f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire et $\quad f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

Une équation différentielle
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \ : \ f''(x) + f(-x) = 2\cos(x)$$

On propose deux méthodes pour y arriver. Le résultat préliminaire servira uniquement dans la première méthode.

2. *Première méthode :*
   a) Démontrer que si une fonction paire est deux fois dérivable alors sa dérivée seconde est paire.
   Trouver et démontrer un résultat analogue pour une fonction impaire.
   b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, f_p et f_i sont respectivement solutions d'une équation différentielle linéaire du second degré, que l'on explicitera pour chacune d'elles.
   c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
   En déduire la forme de f_i.
   d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = 2\cos(x)$.
   En déduire la forme de f_p.
   e) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
3. *Deuxième méthode :*
   On se donne une solution f de (E).
   a) Montrer que f est solution de l'équation linéaire du quatrième degré :
   $$y^{(4)} - y = -4\cos(x),$$
   où l'on rappelle que $y^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de y.
   b) On pose $g = f'' - f$. En déduire que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second degré, que l'on explicitera. On note (E') cette équation.
   c) Résoudre (E').
   d) Donner l'ensemble des solutions de (E) et vérifier qu'il coïncide bien avec celui trouvé grâce à la première méthode.

Exercice 1 *Préliminaire :*

1. Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\quad f = f_p + f_i, \quad$ où $\quad f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire et $\quad f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

Une équation différentielle
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \ : \ f''(x) + f(-x) = 2\cos(x)$$

On propose deux méthodes pour y arriver. Le résultat préliminaire servira uniquement dans la première méthode.

2. *Première méthode :*
   a) Démontrer que si une fonction paire est deux fois dérivable alors sa dérivée seconde est paire.
   Trouver et démontrer un résultat analogue pour une fonction impaire.
   b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, f_p et f_i sont respectivement solutions d'une équation différentielle linéaire du second degré, que l'on explicitera pour chacune d'elles.
   c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
   En déduire la forme de f_i.
   d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = 2\cos(x)$.
   En déduire la forme de f_p.
   e) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
3. *Deuxième méthode :*
   On se donne une solution f de (E).
   a) Montrer que f est solution de l'équation linéaire du quatrième degré :
   $$y^{(4)} - y = -4\cos(x),$$
   où l'on rappelle que $y^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de y.
   b) On pose $g = f'' - f$. En déduire que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second degré, que l'on explicitera. On note (E') cette équation.
   c) Résoudre (E').
   d) Donner l'ensemble des solutions de (E) et vérifier qu'il coïncide bien avec celui trouvé grâce à la première méthode.