Définition 1 : DL

Soit une fonction f une fonction définie au voisinage de x_0.

f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si on peut écrire :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Propriété 1 : Formule de Taylor Young en a (TY)

Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant a.

Alors $\quad \forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n\varepsilon(x)$

Propriété 2 : DL d'une primitive

Si f admet un DL en x_0 à l'ordre n

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + h^n\varepsilon(h)$$

Alors toute primitive F de f admet aussi un DL en x_0 à l'ordre $n+1$

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + h^{n+1}\varepsilon(h)$$

Exercice 1

1. On pose $f(x) = \mathrm{e}^x$ Calculer $f^{(n)}(x)$. En utilisant TY, donner le DL de e^x à l'ordre n en 0 (Abréviation : $DL_n(0)$)
2. On pose $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
   a) Calciler $f^{(n)}(x)$ puis $f^{(n)}(1)$ (on commencera avec $n = 1, 2, 3$ puis le cas général)
   b) En déduire le $DL_n(1)$ de f
3. En déduire le $DL_4(1)$ de $\sqrt{x}$

Exercice 2

En utilisant le $DL_n(0)$ de e^x en déduire le $DL_{2n}(0)$ de $\cos x$ et le $DL_{2n+1}(0)$ de $\sin x$ Donner le $DL_5(0)$ de $\cos x$ et le $DL_6(0)$ de $\sin x$

Exercice 3

1. Pour $x \neq 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$

   En déduire le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$ puis de $\dfrac{1}{1+x}$
2. En déduire, par integration le $DL_{n+1}(1)$ de $\ln x$
3. Par intégration, deternminer le $DL_{2n+1}(0)$ de $\arctan x$

Exercice 4

On cherche le $DL_5(0)$ de $\tan x$

1. Rappeler l'équivalent de $\tan x$ en 0
2. Trouver un équivalent, qu'on notera $e_1(x)$ de $\tan x - x$
3. Trouver un équivalent de $\tan x - x - e_1(x)$
4. En déduire le DL recherché

Exercice 5

1. Calculer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \sin x + \cos x \quad g(x) = \mathrm{e}^{2x}$

   $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{1+x} \quad i(x) = \dfrac{(\cos x - \sin 2x)}{1+x}$
2. Calculer le $DL_3(2)$ de $1/x$; le $DL_3(3)$ de $\ln x$

Exercice 6

Pour $\alpha = -1/2$ et $k \in \mathbb{N}$,

exprimer $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ à l'aide de nombres factoriels.

En déduire une expression du $DL_{2n+1}(0)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

puis du $DL_{2n+2}(0)$ de $\arcsin(x)$.

Exercice 7

On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
b) montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$
c) Montrer que f est dérivable en 0
d) Déterminer la limite de $f'(x)$ quand $x \to 0$. Que peut-on en déduire ?