 FE 13 c (DL)

Exercice 1 Soit et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) f' est-elle continue en 0 ?

c) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Exercice 2
Soit $f :]-1,\ 0[\cup]0,\ +1[\to \mathbb{R}$ définie par $\quad f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 3 Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par $\quad f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{1+x}$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 4 Montrer que la fonction $\quad f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les $DL_n(0)$ sont nuls.

Exercice 6 équations fonctionnelles
On veut déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

a) Montrer que si f est une solution alors elle satisfait une équation différentielle de la forme $\quad y' = y + Ce^x,\ C \in \mathbb{R}$.

b) Conclure.

Exercice 1 Soit et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) f' est-elle continue en 0 ?

c) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Exercice 2
Soit $f :]-1,\ 0[\cup]0,\ +1[\to \mathbb{R}$ définie par $\quad f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 3 Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par $\quad f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{1+x}$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 4 Montrer que la fonction $\quad f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les $DL_n(0)$ sont nuls.

Exercice 6 équations fonctionnelles
On veut déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

a) Montrer que si f est une solution alors elle satisfait une équation différentielle de la forme $\quad y' = y + Ce^x,\ C \in \mathbb{R}$.

b) Conclure.